А. КИСЕЛЕВЪ.

СИСТЕМАТИЧЕСКІЙ КУРСЪ АРИѲМЕТИКИ.

Допущенъ Уч. Ком. М. Н. Пр. въ качествѣ руководства для среднихъ учебныхъ заведеній, мужскихъ и женскихъ («Журн. М. Н. Пр.» 1915, май), рекомендованъ Уч. Ком. при Св. Синодѣ для употребленія въ духовныхъ училищахъ въ качествѣ руководства («Церк. Вѣд.» 1892, № 37); одобренъ Учебн. Ком., состоящимъ при собственной Его Императорскаго Величества Канцеляріи по учрежденіямъ Императрицы Маріи, въ качествѣ руководства для всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній этого вѣдомства (извѣщеніе отъ 11 января 1901 г., № 822); одобренъ Деп. Торг. и Ман., какъ пособіе для коммерческихъ училищъ (извѣщеніе отъ 30 мая 1898 г., № 14228); допущенъ къ употребленію въ старшихъ классахъ городск. и уѣздн. училищъ; включенъ въ каталогъ книгъ для учительск. библіотекъ. Для кадетскихъ корпусовъ рекомендованъ, какъ руководство.

Изданіе двадцать восьмое.

Цѣна 90 коп.

ИЗДАНІЕ
Т-ва „В. В. ДУМНОВЪ, наслѣдн. бр. САЛАЕВЫХЪ“.
МОСКВА, Мясницкая улица, д. № 5. || ПЕТРОГРАДЪ, Большая Конюшенная, № 1.
1916.

ИЗЪ ПРЕДИСЛОВІЙ

КЪ РАЗНЫМЪ ИЗДАНІЯМЪ.

Къ четвертому изданію. Хотя успѣхъ первыхъ трехъ изданій «Систематическаго курса ариѳметики» даетъ объективное основаніе думать, что этотъ учебникъ достаточно приспособленъ къ потребностямъ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеній, тѣмъ не менѣе, приступая къ 4-му изданію, мы сочли нужнымъ подвергнуть тщательному пересмотру содержаніе прежнихъ изданій, съ цѣлью, во-первыхъ, болѣе согласовать его съ послѣдними программами и учебными планами, а во-вторыхъ, достигнуть возможно бо́льшей простоты въ изложеніи.

Главнѣйшія особенности 4-го изданія заключаются въ слѣдующемъ:

1. Согласно замѣчаніямъ Учен. Ком. Мин. Нар. Пр., сдѣланы измѣненія въ опредѣленіи первыхъ четырехъ дѣйствій, при чемъ въ основу опредѣленій поставлено понятіе о суммѣ.

2. Во всемъ курсѣ строго проведено различіе между величиною и ея значеніями.

3. Въ курсѣ дробей проведена бо́льшая систематичность.

4. Дано болѣе научное опредѣленіе пропорціональности величинъ и указаны признаки прямой и обратной пропорціональности для руководства въ частныхъ случаяхъ.

5. Согласно послѣднимъ программамъ, помѣщены въ самомъ текстѣ нумераціи славянская и римская, а также— въ сокращенномъ изложеніи—метрическая система мѣръ.

6. Добавлена статья о приближенныхъ вычисленіяхъ, проходимая въ 6-мъ классѣ реальныхъ училищъ.

Къ десятому изданію. Въ этомъ изданіи существенно дополнена статья подъ названіемъ «З а д а ч и н а в ы ч и с л е н і е в р е м е н и». Во-первыхъ, для такихъ задачъ указанъ другой пріемъ рѣшенія, чаще всего практикуемый въ дѣйствительности; во-вторыхъ, уяснено (мелкимъ шрифтомъ) различіе между к а л е н д а р н ы м ъ счетомъ, по которому промежутокъ времени выражается въ невполнѣ постоянныхъ единицахъ, каковы мѣсяцы и годы, и т о ч н ы м ъ счетомъ, по которому промежутокъ времени измѣряется постоянными единицами: недѣлями, сутками и подраздѣленіями сутокъ.

Къ четырнадцатому изданію. Ариѳметическое отношеніе и ариѳметическая пропорція, какъ не представляющія теоретическаго интереса и не имѣющія практическихъ примѣненій, выпущены совсѣмъ съ цѣлью уменьшить количество учебнаго матеріала.

Кратному отношенію дано болѣе научное опредѣленіе, сближающее его съ тѣмъ, которое разсматривается въ геометріи.

При объясненіи рѣшенія задачъ на простое и сложное тройное правило на первое мѣсто выдвинутъ способъ приведенія къ единицѣ, вслѣдствіе чего является возможность сократить изложеніе главы пропорціи.

Изложеніе сложнаго тройного правила значительно упрощено и сокращено.

Къ двадцать пятому изданію. Главнѣйшія измѣненія и дополненія, введенныя въ это изданіе, состоятъ въ слѣдующемъ:

Въ § 24,*a* изложено замѣчаніе о томъ, въ какомъ смыслѣ надо понимать сложеніе н у л я съ другими числами.

Въ § 25 правило сложенія цѣлыхъ чиселъ изложено болѣе просто и ясно.

Въ § 47 перемѣстительное свойство произведенія разъяснено болѣе наглядно.

Въ § 134 доказательство второй изъ 2-хъ истинъ, на которыхъ основанъ способъ послѣдовательнаго дѣленія (для нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ), перенесено теперь, какъ трудно усвояемое учениками младшихъ классовъ, изъ обыкновеннаго шрифта въ мелкій.

§§ 149, 150, 151 и 152 («Измѣненіе величины дроби съ измѣненіемъ ея членовъ») изложены болѣе систематично и ясно.

Въ §§ 193 и 194 нѣсколько улучшено изложеніе дѣленія десятичной дроби на цѣлое число.

Сверхъ этихъ измѣненій укажемъ еще нѣкоторыя, введенныя въ мелкій шрифтъ (для учащихся старшихъ классовъ), съ цѣлью достиженія бо́льшей систематичности, полноты и научности.

Добавленъ § 21,*a*, въ которомъ разъясняется, что указанное въ текстѣ главное свойство суммы распадается въ сущности на два отдѣльныя свойства, называемыя «перемѣстительнымъ» и «сочетательнымъ».

Въ § 38 добавлено замѣчаніе, что измѣненіе суммы, указанное въ этомъ параграфѣ, представляетъ собою слѣдствіе свойствъ сочетательнаго и перемѣстительнаго.

Добавленъ § 61,*a* о сочетательномъ и распредѣлительномъ свойствахъ произведенія.

Къ § 110 добавлено доказательство двухъ истинъ, на которыхъ основано нахожденіе признаковъ дѣлимости.

Въ § 120,*a* добавлено слѣдствіе: «произведеніе нѣсколькихъ сомножителей: $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ дѣлится на простое число p только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ этихъ сомножителей дѣлится на p». Эта истина имѣетъ примѣненіе въ дальнѣйшемъ изложеніи дѣлимости.

Добавленъ § 208,*a*—«Безконечныя десятичныя дроби непеpіодическія»—и обобщенъ на такія дроби признакъ неравенства, указанный раньше для дробей конечныхъ.

Взамѣнъ прежняго § 241,*a* («Общія формулы процентовъ») теперь данъ болѣе полный § 247, въ которомъ, между прочимъ, разъясненъ пріемъ вычисленія процентовъ, практикуемый очень часто въ банковыхъ операціяхъ.

Къ двадцать восьмому изданію. Въ этомъ изданіи, основываясь на циркулярѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія отъ 6-го августа 1914 г. (№ 38341)[*]), которымъ рекомендуется изученіе періодическихъ дробей перенести въ курсъ алгебры и производить при прохожденіи геометрической прогрессіи, мы значительно сократили тѣ параграфы, которые были посвящены этимъ дробямъ и большинство ихъ перенесли въ мелкій шрифтъ.

*) Помѣщенномъ въ октябрьской книжкѣ журнала Мин. Нар. Пр. за 1914 годъ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Отвлеченныя цѣлыя числа.

I. Счисленіе.

1. Понятіе о числѣ. Одинъ предметъ да одинъ предметъ составляютъ два предмета; два предмета да одинъ предметъ составляютъ три предмета; три да одинъ составляютъ четыре; и т. д.

Одинъ, два, три, четыре... и т. д. называются **числами**.

Число одинъ называется иначе **единица**.

Всякое число, кромѣ единицы, представляетъ собою собраніе единицъ.

Число наз. **предметнымъ** (или конкретнымъ), если оно сопровождается названіемъ тѣхъ предметовъ, изъ которыхъ составлено; напр., пять карандашей.

Число наз. **отвлеченнымъ**, если неизвѣстно, собраніе какихъ предметовъ оно представляетъ; напр., пять.

2. Естественный рядъ чиселъ. Если къ единицѣ присоединимъ еще единицу, къ полученному числу снова присоединимъ единицу, къ этому числу опять присоединимъ единицу и т. д., то получимъ **естественный** (**или натуральный**) **рядъ чиселъ**:

одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь и т. д.

Наименьшее число въ этомъ ряду — единица; наибольшаго числа нѣтъ, потому что ко всякому числу, какъ бы

велико оно ни было, можно прибавить еще единицу; значитъ естественный рядъ чиселъ можетъ быть продолжаемъ безъ конца.

3. Счетъ. Чтобы имѣть ясное понятіе о собраніи предметовъ, мы должны сосчитать ихъ. Счетъ состоитъ въ томъ, что, отдѣляя одинъ предметъ за другимъ (на самомъ дѣлѣ или только мысленно), мы называемъ каждый разъ число, составившееся изъ отдѣленныхъ предметовъ. Такъ, считая столы въ классѣ, мы отдѣляемъ мысленно одинъ столъ за другимъ и говоримъ: одинъ, два, три, четыре и т. д.

Чтобы умѣть считать до какого угодно большого числа, надо научиться называть всякое число.

Способъ составлять названія для всякихъ чиселъ называется **словеснымъ счисленіемъ** или словесною **нумераціею.**

Способъ выражать всякое число особыми письменными знаками называется **письменнымъ счисленіемъ** или письменною **нумераціею.**

Ознакомимся сначала со счисленіемъ чиселъ до тысячи а затѣмъ и со счисленіемъ другихъ чиселъ.

4. Словесное счисленіе до тысячи. Первыя десять чиселъ носятъ слѣдующія названія:

одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять (или десятокъ).

Съ помощью этихъ названій и еще нѣкоторыхъ другихъ можно выражать и другія числа. Положимъ, напр., мы желаемъ назвать число поставленныхъ здѣсь черточекъ:



Для этого отсчитываемъ десять черточекъ и отдѣляемъ ихъ отъ остальныхъ; потомъ отсчитываемъ еще десять черточекъ и отдѣляемъ ихъ отъ остальныхъ. Продолжаемъ такъ отсчитывать по десятку до тѣхъ поръ, пока либо совсѣмъ не останется черточекъ, либо ихъ останется менѣе

десяти. Теперь сосчитаемъ десятки и оставшіяся черточки (или единицы); такъ какъ десятковъ оказалось четыре, а оставшихся черточекъ три, то мы можемъ число всѣхъ черточекъ назвать такъ:

четыре десятка, три единицы.

Когда въ числѣ окажется болѣе десяти десятковъ, то поступаютъ такъ же, какъ если бы эти десятки были отдѣльныя единицы, т.-е. отсчитываютъ десять десятковъ, потомъ еще десять десятковъ, затѣмъ снова десять десятковъ и т. д. до тѣхъ поръ, пока можно. Каждые десять десятковъ называютъ однимъ словомъ: **сто** или **сотня**. Положимъ, что въ какомъ-нибудь числѣ оказывается: сотенъ—три, десятковъ—пять и оставшихся единицъ—семь; такое число можно назвать такъ:

три сотни, пять десятковъ, семь единицъ.

Если сотенъ въ числѣ окажется болѣе десяти, то считаютъ ихъ тоже десятками. Каждыя десять сотенъ называютъ однимъ словомъ **тысяча**.

5. Сокращеніе нѣкоторыхъ названій. Въ нашемъ языкѣ употребительны нѣкоторыя сокращенныя названія чиселъ. Такъ, десять да одинъ назыв. одиннадцать (т.-е. одинъ-на-десять); десять да два наз. двѣнадцать (т.-е. двѣ-на-десять) и т. д. Два десятка наз. двадцать (т.-е. два-десять); три десятка наз. тридцать (т.-е. три-десять) и т. д. (четыре десятка наз. сорокъ). Двѣ сотни наз. двѣсти; три сотни наз. триста и т. д.

6. Письменное счисленіе до тысячи. Первыя девять чиселъ обозначаются особенными письменными знаками или **цыфрами**:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Съ помощью этихъ девяти цыфръ и десятой 0 (нуль), означающей *отсутствіе числа*, можно изобразить всякое число.

Для этого условились писать: простыя единицы — на первомъ мѣстѣ справа, десятки—на второмъ мѣстѣ справа, сотни—на третьемъ мѣстѣ; напр.:

триста сорокъ пять изобразится . . . 345;
триста сорокъ . . . . 340.
триста . . . . 300.

Съ лѣвой стороны цыфернаго изображенія числа не принято писать нулей; такъ, вмѣсто 024 пишутъ короче: 24, потому что порядокъ мѣстъ всегда считаютъ **справа** и потому и въ первомъ, и во второмъ изображеніи цыфра 2 стоитъ на второмъ мѣстѣ, а цыфра 4 — на первомъ, и, слѣдовательно, въ обоихъ изображеніяхъ 2 означаетъ десятки, а 4—единицы.

Всѣ цыфры, кромѣ нуля, называются **значащими** цыфрами.

Число, изображаемое одною цыфрой, называется **однозначнымъ**, двумя цыфрами — **двузначнымъ**, многими цыфрами—**многозначнымъ**.

7. Словесное счисленіе чиселъ, превосходящихъ тысячу. Когда считаемыхъ предметовъ болѣе тысячи, то составляютъ изъ нихъ столько тысячъ, сколько можно; затѣмъ считаютъ тысячи и оставшіяся единицы и называютъ число тѣхъ и другихъ; напр.: двѣсти сорокъ тысячъ пятьсотъ шестьдесятъ двѣ единицы.

Тысяча тысячъ составляетъ **милліонъ.**

Тысяча милліоновъ—**билліонъ** (или **милліардъ**).

Тысяча билліоновъ—**трилліонъ**; и т. п.

Такимъ образомъ можетъ получиться, напр., слѣдующее названіе числа:

сто восемьдесятъ м и л л і о н о в ъ триста сорокъ девять т ы с я ч ъ пятьсотъ шестнадцать е д и н и ц ъ.

8. Составныя и главныя единицы. Десятки, сотни, тысячи, десятки тысячъ, сотни тысячъ, милліоны,

называются **составными** единицами. Изъ нихъ тысячи, милліоны, билліоны, трилліоны и т. д. называются **главными** единицами; къ нимъ причисляютъ также и простыя единицы. Всѣ остальныя составныя единицы представляютъ собою либо десятки, либо сотни этихъ главныхъ единицъ.

9. Письменное счисленіе чиселъ, превосходящихъ тысячу. Пусть требуется написать число:

тридцать пять билліоновъ восемьсотъ шесть милліоновъ семь тысячъ шестьдесятъ три единицы.

Его можно было бы написать при помощи цыфръ и словъ такъ:

35 билліоновъ 806 милліоновъ 7 тысячъ 63 единицы, или, короче, такъ:

35′806′7′63,

если условимся, что первая справа запятая замѣняетъ собою слово «тысячъ», вторая—слово «милліоновъ», третья—слово «билліоновъ», четвертая—слово «трилліоновъ» и т. д. Подобно этому:

15′36′801 означало бы: 15 милл. 36 тысячъ 801 ед.
3′3′205′1 » 3 билл. 3 милл. 205 тысячъ 1 ед.

Но такой способъ писанія имѣетъ много неудобствъ. Напр., если бы въ выраженіи: 4′57′8 запятыя стерлись (или ихъ забыли написать), а остались бы только однѣ цыфры: 4578, то нельзя было бы прочесть число, такъ какъ неизвѣстно, какія цыфры означаютъ милліоны, какія—тысячи и какія—единицы. Для избѣжанія этого и другихъ неудобствъ числа пишутъ такъ, чтобы между двумя сосѣдними запятыми всегда стояли три цыфры. Напр., вмѣсто такого изображенія: 4′57′8′ пишутъ:

4′057′008

При этомъ запятыя становятся безполезными, потому что и безъ нихъ мы будемъ знать, что **первыя справа три цыфры означаютъ число единицъ, слѣдующія влѣво**

тр цыфры означають число тысячъ, слѣдующія за этими влѣво три цыфры—число милліоновъ, и т. д. Напр.:

567 002 301 означаетъ 567 милл. 2 тыс. 301 ед.
2 008 001 020 » 2 билл. 8 милл. 1 тыс. 20 ед.
15 000 026 » 15 милл. 26 ед. и т. п.

10. Какъ прочесть число, написанное длиннымъ рядомъ цыфръ. Чтобы легче прочесть число, изображенное длиннымъ рядомъ цыфръ, напр., такое: 5183000567000, отдѣляютъ въ немъ справа (напр., запятою, поставленною сверху) по три цыфры до тѣхъ поръ, пока можно:

5′183′000′567′000.

Первая справа запятая замѣняетъ слово «тысячъ», вторая — «милліоновъ», третья — «билліоновъ», четвертая— «трилліоновъ». Значитъ, наше число должно быть прочтено такъ: 5 трилл. 183 билл. 567 тысячъ.

Для удобнаго прочтенія иногда пишутъ (и печатаютъ) большія числа такимъ образомъ, чтобы каждыя три цыфры, считая справа, отдѣлялись небольшими промежутками; напр.: 5 183 000 567 000. Тогда число удобно прочесть, и не ставя запятыя.

11 Значеніе мѣстъ, занимаемыхъ цыфрами. При такомъ способѣ писанія чиселъ каждое мѣсто, занимаемое цыфрой, имѣетъ свое особое значеніе, а именно:

на	1-мъ	мѣстѣ	справа	ставятся	простыя единицы
»	2-мъ	»	»	»	десятки
»	3-мъ	»	»	»	сотни
»	4-мъ	»	»	»	единицы тысячъ
»	5-мъ	»	»	»	десятки тысячъ
»	6-мъ	»	»	»	сотни тысячъ
»	7-мъ	»	»	»	ед. милліоновъ
»	8-мъ	»	»	»	дес. милліоновъ
»	9-мъ	»	»	»	сотни милліоновъ
»	10-мъ	»	»	»	ед. билліоновъ и т. д.

12. Двоякое значеніе цыфръ. Мы видимъ такимъ образомъ, что наше письменное счисленіе основано на употребленіи 10 цыфръ, которымъ приписывается двоякое значеніе: одно—въ зависимости отъ начертанія цыфры, другое — въ зависимости отъ мѣста, занимаемаго цыфрой; а именно: **изъ двухъ написанныхъ рядомъ цыфръ лѣвая означаетъ единицы, въ 10 разъ бóльшія, чѣмъ правая.**

13. Разряды единицъ. Различныя единицы, которыми пользуются при исчисленіи, раздѣляютъ на **разряды:**

простыя единицы называются единицами 1-го разряда,
десятки—единицами 2-го разряда,
сотни—единицами 3-го разряда, и т. д.

Всякая составная единица, по сравненію съ другою единицею, меньшею ея, называется единицею **высшаго разряда**, а по сравненію съ единицею, бóльшею ея, называется единицею **низшаго разряда**; такъ, сотня есть единица высшаго разряда сравнительно съ десяткомъ и единица низшаго разряда сравнительно съ тысячею

Всякая составная единица содержитъ въ себѣ 10 единицъ слѣдующаго низшаго разряда; напр., сотня тысячъ содержитъ въ себѣ 10 десятковъ тысячъ; десятокъ тысячъ—10 тысячъ и т. д.

Замѣчаніе. Разряды единицъ группируютъ еще въ **классы**; къ 1-му классу относятъ первые три разряда: сотни, десятки и единицы; ко 2-му классу относятъ слѣдующіе три разряда: тысячи, десятки тысячъ и сотни тысячъ и т. д. 1-й классъ есть **классъ единицъ** (содержитъ сотни, десятки и единицы единицъ); 2-й классъ—**классъ тысячъ** (содержитъ сотни, десятки и единицы тысячъ) и т. д.

14. Какъ узнать, сколько въ числѣ всѣхъ единицъ даннаго разряда. Пусть требуется узнать, сколько въ числѣ 56284 заключается в с ѣ х ъ

сотенъ, т.-е. сколько сотенъ заключается въ десяткахъ тысячъ, въ тысячахъ и въ сотняхъ даннаго числа вмѣстѣ.

Простыя сотни ставятся на третьемъ мѣстѣ справа; въ данномъ числѣ на третьемъ мѣстѣ стоитъ цыфра 2; значитъ, въ числѣ есть 2 простыя сотни. Слѣдующая влѣво цыфра 6 означаетъ тысячи; но въ каждой тысячѣ содержится 10 сотенъ; значитъ, въ 6 тысячахъ ихъ заключается 60. Слѣдующая влѣво цыфра 5 означаетъ десятки тысячъ; но каждый десятокъ тысячъ содержитъ въ себѣ 10 тысячъ и, слѣд., 100 сотенъ; значитъ, въ 5 десяткахъ тысячъ заключается 500 сотенъ. Всего, такимъ образомъ, въ данномъ числѣ содержится сотенъ 500 да еще 60 да еще 2, т.-е. 562.

Такъ же узнаемъ, что въ данномъ числѣ всѣхъ десятковъ 5628.

Правило. Чтобъ узнать, сколько въ числѣ заключается всѣхъ единицъ даннаго разряда, надо отбросить всѣ цыфры, означающія низшіе разряды, и прочесть число, выражаемое оставшимися цыфрами.

Различныя системы счисленія.

15*. Понятіе о системахъ счисленія. Наша система счисленія называется **десятичной** (или десятиричной), потому что по этой системѣ 10 ед. одного разряда составляютъ составную единицу слѣдующаго высшаго разряда. Число 10 называютъ поэтому **основаніемъ** десятичной системы счисленія. Всякое число N по этой системѣ представляется разложеннымъ на простыя единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д., при чемъ число единицъ каждаго разряда меньше 10. Если положимъ, что въ числѣ N содержится простыхъ единицъ a, десятковъ b, сотенъ c, тысячъ d и т. д., то по десятичной системѣ это число представляетъ собою сумму:

$$N=a+b.10+c.10^2+d.10^3+e.10^4+\dots$$

Можно вообразить себѣ другія системы, въ которыхъ за основаніе принято какое-нибудь иное число. Если, напр., за основаніе взять число 5, то получится пятиричная система счисленія, по которой 5 ед. одного разряда должны составить единицу слѣдующаго высшаго разряда. Такимъ образомъ, по пятиричной системѣ единица 2-го разряда должна быть пятерка, ед. 3-го разряда—пять пятерокъ, или 5^2, ед. 4-го разряда—пять разъ по пяти пятерокъ или 5^3 и т. д. По этой системѣ число N представлялось бы такъ:

$$N=a+b.5+c.5^2+d.5^3+e.5^4+...$$

гдѣ каждое изъ чиселъ: a, b, c, d, e... было бы меньше 5-ти. Для выговариванія чиселъ по этой системѣ достаточно было бы дать особыя названія первымъ пяти числамъ и нѣкоторымъ составнымъ единицамъ.

16*. Число цыфръ, потребное для изображенія чиселъ по данной системѣ. Для письменнаго изображенія чиселъ по десятичной системѣ употребляются 10 различныхъ знаковъ. Для другой системы счисленія потребовалось бы иное число цыфръ. Напр., для пятиричной системы достаточно было бы слѣдующихъ пяти цыфръ: 1, 2, 3, 4, 0. Дѣйствительно, число 5 представляло бы по этой системѣ одну единицу 2-го разряда и, слѣд., выразилось бы такъ: 10. Число 6 представляло бы одну ед. 2-го разряда (пятерку) и одну ед. 1-го разряда и, слѣд., выразилось бы такъ: 11, и т. п. Для изображенія чиселъ по системѣ, у которой основаніе превосходитъ 10, было бы недостаточно нашихъ цыфръ. Напр., для двѣнадцатиричной системы пришлось бы придумать особые знаки для чиселъ десять и одиннадцать, потому что наши обозначенія этихъ чиселъ выражали бы тогда другія числа, именно: 10 означало бы одну единицу второго разряда, т.-е. дюжину, а 11 означало бы одну единицу 2-го разряда и одну единицу 1-го разряда, т.-е. тринадцать.

17*. Число, написанное по десятичной системѣ счисленія, изобразить по другой системѣ. Для примѣра положимъ, что требуется число 1766 выразить по пятиричной системѣ при помощи пяти знаковъ: 0, 1, 2, 3, 4. Для этого узнаемъ сначала,

сколько въ 1766 заключается единицъ 2-го разряда, т.-е. пятерокъ. Ихъ оказывается 353, при чемъ остается одна единица

```
1766 | 5
 26    353 | 5
  16     3   70 | 5
   1         20   14 | 5
              0    4   2
```

1-го разряда. Теперь узнаемъ, сколько въ 353 пятеркахъ заключается единицъ 3-го разряда. Такъ какъ единица 3-го разряда содержитъ 5 ед. 2-го разряда, то надо 353 раздѣлить на 5. Раздѣливъ, узнаемъ, что въ 353 пятеркахъ заключается 70 ед. 3-го разряда и 3 ед. 2-го разряда. 70 ед. 3-го разряда превращаемъ въ единицы 4-го разряда; эти послѣднія — въ единицы 5-го разряда и т. д. Такимъ образомъ находимъ, что 1766 содержитъ: 2 ед. 5-го разр., 4 ед. 4-го разряда, 3 ед. 2-го разр. и 1 ед. 1-го разр.; слѣд., 1766 изобразится по пятиричной системѣ такъ: 24031.

Пусть еще требуется изобразить 121380 по 12-ричной системѣ:

```
121380 | 12
  13     10115 | 12
   18      51    842 | 12
    60      35     2     70 | 12
     0      11           10    5
```

Обозначая 10 через a, 11 через b, найдемъ, что данное число изобразится такъ: 5 a 2 b 0.

18*. Число, написанное по какой-нибудь системѣ счисленія, изобразить по десятичной. Пусть, напр., требуется число 5623, написанное по 8-ричной системѣ, перевести на десятичную систему. Это можно выполнить, вычисливъ сумму:

$$N=3+2\,.\,8+6\,.\,8^2+5\,.\,8^3=3+16+384+2560=2963.$$

Но проще поступить такъ:

5623 ×8 40 +6 46 ×8 368 +2 370 ×8 2960 +3 2963	Раздробимъ 5 ед. 4-го разр. въ единицы 3-го разр., для чего умножимъ 5 на 8 (потому что единица 4-го разряда содержитъ по восьмиричной системѣ 8 ед. 3-го разр.); къ полученному числу приложимъ 6 ед., находящіяся въ данномъ числѣ. Раздробимъ единицы 3-го разряда въ единицы 2-го разр.; къ полученному числу приложимъ 2 ед., находящіяся въ данномъ числѣ. Раздробимъ единицы 2-го разр. въ ед. 1-го разр.; къ полученному числу приложимъ 3 ед., находящіяся въ данномъ числѣ. Получимъ 2963. Если число, написанное по системѣ не-десятичной, требуется изобразить по другой системѣ, тоже не-десятичной, то предварительно переводятъ первое число на десятичную систему, а затѣмъ уже это число на новую систему.

19*. Замѣчанія. 1) Система десятичнаго счисленія распространена почти повсемѣстно (даже среди большинства дикихъ народовъ). Многіе видятъ причину такой распространенности въ томъ, что каждый человѣкъ съ дѣтства привыкаетъ считать при помощи 10 пальцевъ обѣихъ рукъ. Однако, десятичное счисленіе не принадлежитъ къ самымъ удобнымъ. Напр., удобнѣе была бы 12-ричная система, которая, не требуя для изображенія чиселъ большого числа цыфръ, обладаетъ важнымъ свойствомъ, что основаніе ея дѣлится безъ остатка на 2, на 3, на 4 и на 6, тогда какъ основаніе нашей системы дѣлится только на 2 и на 5. Въ теоретическомъ отношеніи представляетъ нѣкоторыя удобства система двуричная, которая, впрочемъ, для практическихъ цѣлей совсѣмъ неудобна, такъ какъ по этой системѣ даже небольшое число выражается длиннымъ рядомъ цыфръ (напр., число 70 выражается такъ: 1000110). Но каковы бы не были недостатки десятичной системы, она настолько укоренилась своею давностью и повсемѣстнымъ распространеніемъ, что было бы безполезно поднимать вопросъ о замѣнѣ ея другою системою. Къ тому же новая система счисленія потребовала бы переработки всѣхъ книгъ и таблицъ, составленныхъ по десятичной системѣ, что представляло бы почти невыполнимый трудъ.

2) Употребляемыя нами цыфры и самая система письменнаго счисленія заимствованы европейцами у арабовъ (около XII столѣтія). Вотъ почему эти цыфры называютъ **арабскими**. Но есть основаніе думать, что арабы, въ свою очередь, заимствовали эту систему отъ индійцевъ.

3) Десятичныя дроби также могутъ быть изображены по системѣ счисленія съ основаніемъ, отличнымъ отъ 10. Напр., дробь 0,324, написанная по 5-ричной системѣ, означаетъ сумму: $\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}$.

II. Сложеніе.

Задача. Въ коробочку положили 5 спичекъ, потомъ 7 спичекъ, затѣмъ еще 2 спички. Сколько всѣхъ спичекъ оказалось въ коробочкѣ?

Въ коробочкѣ оказалось 14 спичекъ; это—число, которое получается отъ соединенія трехъ чиселъ: 5, 7 и 2 въ одно собраніе.

20. Что такое сложеніе. Нѣсколько чиселъ могутъ быть соединены въ одно число, которое называется ихъ **суммой**. Такъ, 5 спичекъ да 7 спичекъ да 2 спички могутъ быть соединены въ одно число: 14 спичекъ. Число 14 есть сумма трехъ чиселъ: 5, 7 и 2.

Нахожденіе по нѣсколькимъ даннымъ числамъ одного новаго числа называется **ариѳметическимъ дѣйствіемъ.**

Ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго находится сумма нѣсколькихъ чиселъ. наз. сложеніемъ.

Данныя для сложенія числа наз **слагаемыми.**

Замѣчаніе. Выраженія; «къ 7 прибавить 3», «къ 7 приложить 3» и т. п, означаютъ то же самое, что: «найти сумму 7-ми и 3-хъ».

21. Главное свойство суммы. Сумма не зависитъ отъ того порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ. Такъ, если требуется найти сумму 5, 7 и 2, то мы можемъ къ 5 присоединить 7, потомъ 2; или къ 5 присоединить сначала 2, потомъ 7; или къ 7 присоединить 2 и полученную сумму приложить къ 5. Можемъ поступить и такъ: взять какую-нибудь часть 7-и, присоединить къ ней какую-нибудь часть 5-и, потомъ присоединить оставшіяся единицы по одной, по двѣ или какъ-нибудь иначе. Всегда получимъ одну и ту же сумму 14.

21,a*. **Перемѣстительное и сочетательное свойства суммы.** Свойство суммы, указанное въ предыдущемъ параграфѣ, распадается въ сущности на 2 отдѣльныя свойства, которыя можно высказать такъ:

1) **Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ**; такъ (если слагаемыхъ взято три):

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=c+b+a=\dots$$

2) **Сумма не измѣнится, если какія либо слагаемыя мы замѣнимъ ихъ суммою**; такъ:

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c).$$

Первое свойство наз. **перемѣстительнымъ**, второе—**сочетательнымъ**; они настолько очевидны, что мы можемъ принять ихъ безъ доказательства.

Замѣтимъ, что сочетательное свойство часто высказывается иными словами, такъ: **чтобы къ какому-нибудь числу прибавить сумму, достаточно прибавить къ этому числу каждое слагаемое одно за другимъ**; напр.:

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

22. Сложеніе двухъ однозначныхъ чиселъ.

Чтобы найти сумму двухъ однозначныхъ чиселъ, достаточно къ одному изъ нихъ присчитать всѣ единицы другого. Такъ, присчитывая къ 7 всѣ единицы числа 5, находимъ сумму 12.

Чтобы умѣть быстро складывать всякія числа, слѣдуетъ запомнить всѣ суммы, которыя получаются отъ сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ.

23. Сложеніе многозначнаго числа съ однозначнымъ. Пусть требуется сложить 37 и 8. Для этого отъ 37 отдѣлимъ 7 ед. и сложимъ ихъ съ 8; получимъ 15. Эти 15 ед. приложимъ къ 30; но 15 все равно что 10 да 5. Приложивъ къ 30-и 10, получимъ 40; приложивъ къ 40 еще 5, получимъ 45.

Можно поступить и такъ. Замѣтивъ, что къ 37 надо приложить 3, чтобы получить 40, отдѣлимъ 3 ед. отъ 8 ед. и приложимъ ихъ къ 37; тогда получимъ 40 и еще 5 ед., оставшіяся отъ 8-и, т.-е. получимъ 45.

Слѣдуетъ привыкнуть выполнять эти дѣйствія въ умѣ и притомъ быстро.

24. Сложеніе многозначныхъ чиселъ. Пусть требуется найти сумму 4-хъ чиселъ: 13653, 22409, 1608 и 346. Для этого сложимъ сначала простыя единицы всѣхъ слагаемыхъ, потомъ ихъ десятки, затѣмъ сотни и т. д. Чтобы при этомъ не смѣшать между собою единицъ различныхъ разрядовъ, напишемъ данныя числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки—подъ десятками, сотни—подъ сотнями и т. д.; подъ послѣднимъ слагаемымъ проведемъ черту:

$$\begin{array}{r} 13653 \\ 22409 \\ 1608 \\ 346 \\ \hline 38016 \end{array}$$

Сложивъ единицы, получимъ 26, т.-е. 2 десятка и 6 единицъ; 2 десятка запомнимъ, чтобы ихъ сложить съ десятками данныхъ чиселъ, а 6 единицъ запишемъ подъ чертою, подъ единицами слагаемыхъ. Сложивъ десятки

(вмѣстѣ съ тѣми 2 десятками, которые получились отъ сложенія единицъ*), получимъ 11 дес., т.-е. 1 сотню и 1 десятокъ. 1 сотню мы запомнимъ, чтобы ее сложить съ сотнями, а 1 десятокъ напишемъ подъ чертою, на мѣстѣ десятковъ. Отъ сложенія сотенъ получимъ 20 сотенъ, т.-е. ровно 2 тысячи; эти 2 тысячи запомнимъ, чтобы ихъ прибавить къ тысячамъ, а подъ чертою напишемъ 0 на мѣстѣ сотенъ. Продолжаемъ такъ дѣйствіе далѣе.

24,а. Замѣчанія. 1) Если при сложеніи цыфръ какого-нибудь столбца (напр., десятковъ въ данномъ нами примѣрѣ) встрѣтится цыфра 0, то на нее не обращаютъ вниманія, такъ какъ эта цыфра означаетъ отсутствіе числа. Впрочемъ, мы условимся складывать и нули въ томъ смыслѣ, что **прибавить 0 къ какому-нибудь числу или прибавить къ 0 какое-нибудь число значитъ оставить это число безъ измѣненія.** Такъ, 5 да 0 будетъ 5, а также 0 да 5 будетъ 5.

2) Если слагаемыя числа таковы, что сумма единицъ каждаго разряда ихъ не превосходитъ 9-ти, то безразлично, въ какомъ порядкѣ производить сложеніе: отъ низшихъ разрядовъ къ высшимъ, или наоборотъ. Въ другихъ случаяхъ начинать сложеніе съ высшихъ разрядовъ неудобно, потому что отъ сложенія единицъ низшаго разряда могутъ получиться одна или нѣсколько единицъ слѣдующаго высшаго разряда, и тогда придется измѣнять ранѣе написанную цыфру.

25. Правило сложенія. Пишутъ слагаемое одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки—подъ десятками, сотни—подъ сотнями и т. д.; подъ послѣднимъ слагаемымъ проводятъ черту, подъ которою пишутъ цыфры суммы по мѣрѣ ихъ полученія.

---

*) При этомъ полезно всегда начинать сложеніе съ того числа, которое только что запомнили, чтобы не держать его долго въ умѣ. Такъ, складывая десятки, надо говорить: 2 да 5...7, да 4...11.

Сначала складываютъ простыя единицы всѣхъ слагаемыхъ.

Если отъ сложенія ихъ получается однозначное число, то пишутъ его подъ чертою на мѣстѣ единицъ; если же получается двузначное число*), то единицы его пишутъ подъ чертою, а десятки запоминаютъ, чтобы сложить ихъ вмѣстѣ съ десятками слагаемыхъ.

Потомъ складываютъ десятки всѣхъ слагаемыхъ (вмѣстѣ съ тѣми десятками, которые могли образоваться отъ сложенія единицъ). Если отъ сложенія ихъ получается однозначное число, то пишутъ его подъ чертою налѣво отъ ранѣе написанной цыфры простыхъ единицъ; если же получается двузначное число, то единицы его пишутъ подъ чертою, а десятки запоминаютъ, чтобы сложить ихъ затѣмъ вмѣстѣ съ сотнями слагаемыхъ.

Такимъ же путемъ складываютъ затѣмъ сотни слагаемыхъ, за сотнями—тысячи и т. д.

Если при сложеніи единицъ послѣдняго высшаго разряда получается число двузначное, то его, безъ всякаго измѣненія, пишутъ подъ чертою налѣво отъ ранѣе написанныхъ цыфръ.

26. Сложеніе группами. Если требуется сложить много слагаемыхъ, то для удобства ихъ разбиваютъ на нѣсколько группъ, производятъ сложеніе въ каждой группѣ отдѣльно и затѣмъ полученныя суммы соединяютъ въ одну. Такъ какъ сумма не зависитъ отъ того порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ, то получившееся такимъ образомъ число будетъ надлежащее. Пусть, напр., требуется сложить 10 слагаемыхъ: 286, 35, 76, 108, 93, 16, 426, 576, 45, 72. Разобьемъ эти слагаемыя на группы, напр., такъ:

*) Трехзначное число могло бы получиться только тогда, когда число слагаемыхъ болѣе 11; но въ такомъ случаѣ удобнѣе производить сложеніе по группамъ, какъ указано въ § 26-мъ.

1-я группа.	2-я группа.	3-я группа.	Общая сумма.
286			
108	85	16	1396
426	93	45	204
576	76	72	133
1396	204	133	1733

Сложивъ три суммы въ одну, найдемъ 1733.

27. Повѣрка сложенія. Чтобы убѣдиться, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно, надо его повѣрить. Для повѣрки сложенія обыкновенно складываютъ слагаемыя во второй разъ въ иномъ порядкѣ, чѣмъ въ первый, напр., производя сложеніе снизу вверхъ. Если при второмъ сложеніи получается та же сумма, то весьма вѣроятно, что сложеніе произведено вѣрно*).

28. Увеличеніе числа на другое число. Увеличить число на нѣсколько единицъ значитъ приложить къ числу эти нѣсколько единицъ. Если, напр., требуется увеличить 80 на 25, то это значитъ, что требуется къ 80 приложить 25 (получимъ 105); значитъ, увеличеніе числа на другое число выполняется сложеніемъ.

III. Вычитаніе.

Задача. Въ коробочкѣ было 17 спичекъ; изъ нея вынули 9 спичекъ; сколько спичекъ осталось въ коробочкѣ?

Для рѣшенія задачи надо найти такое число, которое, сложенное съ 9-ю, составляетъ 17.

29. Что такое вычитаніе. Ариѳметическое дѣй-

*) Вѣроятно, а не навѣрное, потому что и при второмъ сложеніи можетъ быть сдѣлана ошибка, подобная той, которая была при первомъ сложеніи.

ствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ и одному слагаемому находится другое слагаемое, наз. вычитаніемъ.

Такъ, вычесть изъ 17-ти 9 значитъ по данной суммѣ 17 и данному слагаемому 9 найти другое слагаемое (8); другими словами, узнать, какое число надо сложить съ 9-ю, или къ какому числу надо приложить 9, чтобы получить въ суммѣ 17.

Такое дѣйствіе принято называть вычитаніемъ потому, что посредствомъ него узнается также, **какое число останется отъ бо́льшого даннаго числа, если отъ него отдѣлимъ (отнимемъ, вычтемъ) меньшее данное число.** Такъ, когда мы по суммѣ 17 и слагаемому 9 нашли, что другое слагаемое должно быть 8, то мы узнали вмѣстѣ съ тѣмъ, что если отъ 17 ед. отдѣлимъ 9 ед., то останется 8 ед.

При вычитаніи данная сумма наз. **уменьшаемымъ**, данное слагаемое—**вычитаемымъ**, а искомое слагаемое—**остаткомъ.** Такъ, если изъ 17 вычитается 9, то 17 есть уменьшаемое, 9—вычитаемое; искомое число 8 есть остатокъ. Остатокъ наз. иначе **разностью**, такъ какъ онъ означаетъ также, на сколько данная сумма (уменьшаемое) разнится отъ даннаго слагаемаго (вычитаемаго).

Замѣчанія. 1) Выраженія: «отнять 9 изъ 17», или «найти, сколько будетъ 17 безъ 9», означаютъ то же, что и «вычесть 9 изъ 17».

2) Уменьшаемое не можетъ быть меньше вычитаемаго, такъ какъ сумма не можетъ быть меньше слагаемаго; напр., нельзя изъ 17 вычесть 20.

3) Если уменьшаемое равно вычитаемому, (напр., если изъ 17 вычитается 17), то принято говорить, что въ этомъ случаѣ остатокъ равенъ 0.

30. Вычитаніе однозначнаго числа. Чтобы безъ затрудненій вычитать всякое число, надо сначала научиться вычитать въ умѣ и притомъ быстро однозначное число изъ однозначнаго и двузначнаго. Искомая

разность легко находится посредствомъ сложенія. Напр., чтобы узнать, сколько будетъ 15 безъ 8, пробуемъ прибавлять къ 8 различныя числа, пока не получимъ 15; 8 да 7 составляютъ 15; слѣд., 15 безъ 8 будетъ 7.

31. Вычитаніе многозначнаго числа. Пусть требуется изъ 60072 вычесть 7345. Будемъ держаться того же порядка, какъ и при сложеніи, т. е. станемъ вычитать единицы изъ единицъ, десятки—изъ десятковъ и т. д.

```
60072....... уменьшаемое
 7345....... вычитаемое
-----
52727....... остатокъ или разность
```

5 ед. изъ 2 ед. нельзя вычесть; беремъ отъ 7 дес. одинъ десятокъ, разлагаемъ его на единицы и прикладываемъ къ 2; получимъ въ уменьшаемомъ единицъ 12, а десятковъ 6. Чтобы запомнить, что десятковъ въ уменьшаемомъ не 7, а 6, поставимъ точку надъ цыфрою 7.

5 ед. изъ 12 ед.... 7 ед. Пишемъ 7 подъ чертою на мѣстѣ единицъ.

4 дес. изъ 6 дес.... 2 дес.; пишемъ 2 подъ чертою на мѣстѣ десятковъ.

3 сотни изъ 0 сотенъ вычесть нельзя. Обращаемся къ тысячамъ уменьшаемаго, чтобы взять отъ нихъ одну для раздробленія въ сотни. Но тысячъ въ уменьшаемомъ нѣтъ. Обращаемся къ слѣдующему высшему разряду, т. е. къ десяткамъ тысячъ; если бы и ихъ не оказалось, мы взяли бы сотни тысячъ и т. д. Въ нашемъ примѣрѣ въ уменьшаемомъ есть 6 десятковъ тысячъ; беремъ отъ нихъ одинъ (въ знакъ чего ставимъ точку надъ цыфрою 6) и раздробляемъ его въ простыя тысячи; получимъ 10 тысячъ. Отъ этихъ 10 тысячъ беремъ одну и раздробляемъ ее въ сотни; тогда получимъ сотенъ 10, тысячъ 9, а десятковъ тысячъ 5. Поставимъ

точку надъ цыфрою 0 тысячъ и условимся, что 0 съ точкой будетъ означать число 9. Теперь продолжаемъ вычитаніе: 3 сотни изъ 10 сотенъ.... 7 сотенъ; 7 тысячъ изъ 9 тысячъ.... 2 тысячи; наконецъ, 5 десятковъ тысячъ уменьшаемаго перейдутъ въ остатокъ безъ всякаго измѣненія, такъ какъ изъ нихъ ничего не вычитается.

Вотъ еще примѣры на вычитаніе:

```
 ....          .....
 6000227       500000
 4320423        17236
 -------       ------
 1679804       482764
```

Замѣчанія. 1) Если случится, что въ вычитаемомъ на какомъ нибудь мѣстѣ стоитъ 0 (какъ, напр., въ первомъ изъ двухъ послѣднихъ примѣровъ), то производятъ вычитаніе такъ, какъ указано, при чемъ предполагается, **что вычесть изъ какого-нибудь числа 0 значитъ оставить это число безъ измѣненія.**

2) Вычитаніе удобнѣе производить отъ низшихъ разрядовъ къ высшимъ потому, что при такомъ порядкѣ мы, въ случаѣ надобности, всегда можемъ взять одну единицу изъ высшихъ разрядовъ уменьшаемаго для раздробленія ея въ единицы низшаго разряда.

31,а. Правило вычитанія. Пишутъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки—подъ десятками и т. д.; подъ вычитаемымъ проводятъ черту, подъ которою пишутъ цыфры остатка по мѣрѣ ихъ полученія.

Сначала вычитаютъ единицы изъ единицъ, потомъ десятки изъ десятковъ, затѣмъ сотни изъ сотенъ и т. д.

Получаемыя отъ вычитанія числа ставятъ подъ чертою на мѣстѣ единицъ, когда вычитались единицы, на мѣстѣ десятковъ, когда вычитались десятки, и т. д.

Если число единицъ какого-нибудь разряда въ уменьшаемомъ окажется меньше числа единицъ того же разряда

въ вычитаемомъ, то мысленно увеличиваютъ это число на 10 и вмѣстѣ съ тѣмъ въ уменьшаемомъ ставятъ точку надъ первой слѣва отъ этого разряда значащей цыфрой, а также и надъ каждымъ изъ нулей, которые могутъ находиться между этимъ разрядомъ и первой слѣва значащей цыфрой; тогда при дальнѣйшемъ вычитаніи принимаютъ, что точка, стоящая надъ значащей цыфрой, уменьшаетъ ея значеніе на единицу; точка же, стоящая надъ нулемъ, обращаетъ его въ девять.

32. Повѣрка вычитанія. Такъ какъ уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и остатокъ—слагаемыя, то, для повѣрки вычитанія, достаточно сложить вычитаемое съ остаткомъ; если получится число, равное уменьшаемому, то весьма вѣроятно, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

33. Уменьшеніе числа на другое число. Уменьшить какое-нибудь число на нѣсколько единицъ значитъ вычесть изъ него эти нѣсколько единицъ. Такъ, если требуется 100 уменьшить на 30, то это значитъ, что требуется изъ 100 отнять 30 (получимъ 70).

34. Сравненіе двухъ чиселъ. Часто приходится узнавать, на сколько единицъ одно число больше или меньше другого. Чтобы узнать это, надо изъ бóльшаго числа вычесть меньшее. Напр., чтобы узнать, на сколько 20 меньше 35 (или на сколько 35 больше 20) надо изъ 35 вычесть 20; тогда найдемъ, что 20 меньше 35 (или 35 больше 20) на 15 единицъ.

35. Обратныя дѣйствія. Два дѣйствія называются **обратными**, если искомое число перваго дѣйствія служитъ даннымъ для второго, а одно изъ данныхъ чиселъ перваго дѣйствія служитъ искомымъ для второго.

Сложеніе и вычитаніе суть дѣйствія обратныя. Дѣйствительно, при сложеніи даются слагаемыя, а отыскивается ихъ сумма; при вычитаніи, наоборотъ, дается сумма и одно слагаемое, а отыскивается другое слагаемое.

IV. Славянская и римская нумераціи.

36. Славянская нумерція. Въ церковныхъ книгахъ и въ памятникахъ славянской письменности употребляются для изображенія чиселъ буквы славянскаго алфавита. Когда буква означаетъ число, то ставятъ надъ ней особый знакъ, называемый титломъ (҃), чтобы сразу было видно, что эта буква означаетъ не звукъ, а число. Слѣдующія 27 буквъ служатъ для выраженія первыхъ 9 чиселъ, 9 десятковъ и 9 сотенъ.

а҃ (1), в҃ (2), г҃ (3), д҃ (4), є҃ (5), ѕ҃ (6), з҃ (7), и҃ (8), ѳ҃ (9), і҃ (10), к҃ (20), л҃ (30), м҃ (40), н҃ (50), ѯ҃ (60), о҃ (70), п҃ (80), ч҃ (90), р҃ (100), с҃ (200), т҃ (300), у҃ (400), ф҃ (500), х҃ (600), ѱ҃ (700), ѿ҃ (800), ц҃ (900)

Нѣсколько буквъ подъ титломъ, написанныхъ рядомъ, означаютъ число, равное суммѣ чиселъ, выражаемыхъ каждою буквою. Для обозначенія тысячъ передъ числомъ ихъ ставится знакъ ҂ Напр., обозначеніе ҂аѿпд҃ выражаетъ число 1884. Буквы ставятся въ томъ порядкѣ, въ какомъ слѣдуютъ числа въ славянскомъ произношеніи. Напр., число 15, произносимое «пять-на-десять», пишется такъ: є҃і, т. е. вначалѣ ставится буква, означающая 5, а за нею буква, означающая 10.

37. Римская нумерація. Такъ какъ римскія цыфры и въ настоящее время употребляются иногда для выраженія чиселъ, то полезно ознакомиться и съ ними. Римляне употребляли для выраженія чиселъ только слѣдующіе семь знаковъ.

I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000.

Ихъ способъ выражать числа существенно отличался отъ нашего. У насъ цыфры измѣняютъ свое значеніе съ перемѣною мѣста, а въ римской нумераціи цыфры на

всякомъ мѣстѣ сохраняютъ свое значеніе. Когда написаны нѣсколько римскихъ цыфръ рядомъ, то число, выражаемое ими, равно суммѣ чиселъ, выражаемыхъ каждой цыфрой; напр., XXV означаетъ сумму 10-и, 10-и и 5-и, т.-е. 25; CLXV означаетъ 165; и т. п. Исключеніе изъ этого правила составляютъ только слѣдующія числа:

4=IV, 9=IX, 40=XL, 90=XC, 400=CD, 900=CM.

Въ этихъ изображеніяхъ значеніе лѣвой цыфры вычитается изъ значенія правой.

Послѣ этого понятны будутъ слѣдующія изображенія чиселъ:

I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8, IX=9, X=10, XI=11, XII=12, XIV=14, XVIII=18, XIX=19 XX=20, XXIX=29, XLII=42, LXXXIV=84, XCV=95, CCC=300, DC=600, DCC=700 MDCCCLXXXIV=1884.

Число тысячъ изображается такъ же, какъ число единицъ, только съ правой стороны, внизу, ставятъ букву *m* (mille—тысяча); напр.:

$$CLXXX_{m}CCCLXIV=180364.$$

V. Измѣненіе суммы и остатка.

38. Измѣненіе суммы при измѣненіи одного слагаемаго: Такъ какъ сумма содержитъ въ себѣ всѣ единицы слагаемыхъ, то очевидно, что:

1) если къ какому-либо слагаемому прибавимъ нѣсколько единицъ, то сумма увеличится на столько же единицъ;

2) если отъ какого-либо слагаемаго отнимемъ нѣсколько единицъ, то сумма уменьшится на столько же единицъ *).

*) Первое изъ указанныхъ измѣненій суммы представляетъ собою слѣдствіе сочетательнаго и перемѣстительнаго свойствъ

Примѣръ:			
	73	73	73
	18	20 (ув. на 2)	18
	40	40	30 (ум. на 10)
	131	133 (ув. на 2)	121 (ум. на 10)

Этими свойствами суммы иногда пользуются **при устномъ сложеніи.** Пусть, напр., требуется къ 427 приложить 68. Искомую сумму мы найдемъ быстро, если къ 427 приложимъ не 68, а 70 (получимъ 497), а затѣмъ уменьшимъ найденное число на 2 (получимъ 495).

39. Измѣненіе суммы при измѣненіи нѣсколькихъ слагаемыхъ. Если одновременно измѣнимъ нѣсколько слагаемыхъ, то сумма иногда увеличится, иногда уменьшится, или же можетъ остаться безъ перемѣны. Чтобы предугадать заранѣе, что произойдетъ съ суммою, надо предположить, что сначала измѣнено только одно слагаемое, потомъ другое, затѣмъ третье... и каждый разъ опредѣлять, какъ будетъ измѣняться сумма. Напр.:

30	Увеличимъ 1-е слаг. на 10 . . .	**40**
25	Увеличимъ 2-е слаг. на 5 . . .	**30**
75	Уменьшимъ 3-е слаг. на 8 . . .	67
130		?

Отъ увеличенія перваго слагаемаго на 10 сумма увеличится на 10. Отъ увеличенія второго слагаемаго на 5 сумма еще увеличится на 5; значитъ, противъ прежняго

(§ 21 *a*). Дѣйствительно, если въ суммѣ $a+b+c$ увеличимъ какое-нибудь слагаемое b на m, то получимъ новую сумму $a+(b+m)+c$, которая, согласно сочетательному свойству, равна суммѣ $a+b+$ $+m+c$, а эта сумма, согласно перемѣстительному свойству, равна $(a+b+c)+m$. Такимъ образомъ, отъ увеличенія какого-нибудь слагаемаго на m сумма также увеличивается на m.

Второе изъ указанныхъ измѣненій есть слѣдствіе перваго измѣненія. Дѣйствительно, если въ суммѣ $a+(b-m)+c$ увеличимъ слагаемое $b-m$ на m, то получимъ новую сумму $a+b+c$, которая, согласно 1-му измѣненію, должна быть больше прежней суммы на m; а это, другими словами, значитъ, что сумма $a+(b-m)+c$ меньше суммы $a+b+c$ на m.

она увеличится на 10 и на 5, т.-е. на 15. Отъ уменьшенія третьяго слагаемаго на 8 сумма уменьшится на 8; значитъ, противъ прежней она увеличится на 15 безъ 8, т.-е. на 7, и, слѣд., будетъ 137.

40. Измѣненіе остатка при измѣненіи одного изъ данныхъ чиселъ. Такъ какъ уменьшаемое есть сумма, а вычитаемое и остатокъ—слагаемыя, то легко понять, что:

1) **если къ уменьшаемому прибавимъ нѣсколько единицъ, то остатокъ увеличится на столько же единицъ;**

2) **если отъ уменьшаемаго отнимемъ нѣсколько единицъ, то остатокъ уменьшится на столько же единицъ;**

3) **если къ вычитаемому прибавимъ нѣсколько единицъ, то остатокъ уменьшится на столько же единицъ;**

4) **если отъ вычитаемаго отнимемъ нѣсколько единицъ, то остатокъ увеличится на столько же единицъ.**

Указанныя свойства полезно имѣть въ виду **при устномъ вычитаніи.** Чтобы вычесть, напр., 28 изъ 75, мы можемъ вычесть изъ 75 не 28, а 30 (получимъ 45), но зато полученное число мы должны увеличить на 2 (получимъ 47).

41. Измѣненіе остатка при измѣненіи обоихъ данныхъ чиселъ. Если станемъ измѣнять одновременно и вычитаемое, и уменьшаемое, то остатокъ иногда увеличится, иногда уменьшится, или же можетъ остаться безъ перемѣны. Напр.:

50	увеличимъ на 10 . . .	60
15	увеличимъ на 15 . . .	30
35		?

Отъ увеличенія уменьшаемаго на 10 остатокъ увеличивается на 10; отъ увеличенія вычитаемаго на 15 остатокъ уменьшается на 15. Значитъ, къ остатку прибавляется 10 и отнимается 15; отъ этого остатокъ уменьшается на 5; значитъ, онъ будетъ 30.

Слѣдуетъ обратить особое вниманіе на случаи, когда, несмотря на измѣненіе данныхъ чиселъ, остатокъ не измѣняется:

если уменьшаемое и вычитаемое увеличимъ на одно и то же число, то остатокъ не измѣнится;

если уменьшаемое и вычитаемое уменьшимъ на одно и то же число, то остатокъ не измѣнится. Напр.:

50	увел. на 10 . .	60	умен. на 10 . .	40
15	увел. на 10 . .	25	умен. на 10 . .	5
35		35		35

VI. Знаки дѣйствій, скобки, формулы.

42. Знаки дѣйствій. При письменномъ рѣшеніи задачъ часто приходится писать рядомъ другъ съ другомъ данныя числа для различныхъ дѣйствій. Въ такихъ случаяхъ полезно отличать одно дѣйствіе отъ другого посредствомъ какихъ-нибудь знаковъ. Условились обозначать сложеніе знакомъ **плюсъ** +, а вычитаніе знакомъ **минусъ** —. Напр.:

$$\begin{array}{r} 446 \\ +\;235 \\ \hline 681 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 446 \\ -\;235 \\ \hline 211 \end{array}$$

Иногда бываетъ нужно, не производя дѣйствій на самомъ дѣлѣ, только указать знаками, какія дѣйствія надо выполнить надъ данными числами. Положимъ, напр., надо указать, что числа 10, 15 и 20 требуется сложить. Тогда пишутъ данныя слагаемыя въ одну строку и ставятъ между ними знакъ сложенія: 10+15+20. Такъ какъ сумма не зависитъ отъ порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ, то безразлично, въ какомъ порядкѣ писать слагаемыя.

Если надо указать, что изъ одного числа требуется вычесть другое, то пишутъ уменьшаемое и вычитаемое въ одну строку и ставятъ между ними знакъ —. Такъ, выраженіе $10-8$ означаетъ, что надо изъ 10 вычесть 8.

Выраженіе $10+15+20$ читается такъ: 10 плюсъ 15 плюсъ 20, или же: сумма 10-и, 15-и и 20-и. Выраженіе $10-8$ читается такъ: 10 минусъ 8, или же: разность 10-и и 8-и.

Если надъ данными числами надо произвести рядъ послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній, то пишутъ числа въ строку въ томъ порядкѣ, въ какомъ надо произвести надъ ними дѣйствія. Такъ, выраженіе $10+15-2+3$ означаетъ, что къ 10-и надо приложить 15, отъ полученной суммы отнять 2 и къ разности приложить 3.

43. Знаки равенства и неравенства. Въ ариѳметикѣ употребительны еще знаки: $=$, $>$ и $<$. Первый наз. знакомъ равенства и замѣняетъ собою слово «равно» или «равняется»; два другіе наз. знаками неравенства и означаютъ: знакъ $>$ «больше», а знакъ $<$ «меньше»; напр., выраженія $7+8=15$, $7+8>10$ и $7+8<20$ читаются такъ: 7 плюсъ 8 равно 15; 7+8 больше 10; 7+8 меньше 20. Слѣдуетъ помнить, что знаки $>$ и $<$ должны быть обращены остреемъ угла къ меньшему числу.

44. Скобки и формулы. При рѣшеніи задачъ весьма полезно раньше совершенія дѣйствій указать, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ надо выполнить надъ данными числами, чтобы дойти до отвѣта на предложенный вопросъ. Положимъ, напр., что для рѣшенія какой-нибудь задачи надо сначала сложить 35 и 20, потомъ эту сумму вычесть изъ 200. Чтобы указать это, пишутъ такъ:

$$200-(35+20)$$

Здѣсь сумма $35+20$ заключена въ скобки, передъ которыми поставленъ знакъ —; тогда этотъ знакъ означаетъ, что изъ 200 надо вычесть не 35, а сумму $35+20$, т.-е. 55.

Иногда выраженіе, содержащее скобки, приходится заключить въ новыя скобки; въ такомъ случаѣ употребляютъ скобки различной формы, чтобы отличить ихъ однѣ отъ другихъ; напр., такое выраженіе:

$$100 + \{160-[60+(7+8)]\}$$

означаетъ: сложить 7 и 8 (получимъ 15); найденную сумму (15) сложить съ 60 (получимъ 75); вычесть найденное число (75) изъ 160 (получимъ 85); сложить полученное число съ 100 (получимъ 185).

Выраженіе, показывающее, какія дѣйствія и въ какой послѣдовательности надо выполнить надъ данными числами, чтобы получить искомое число, наз. формулой.

Вычислить формулу значитъ найти число, которое получится послѣ выполненія всѣхъ дѣйствій, указанныхъ въ формулѣ.

VII. Умноженіе.

Задача. Одна тетрадка стоитъ 7 коп.; сколько стоятъ 4 такія тетрадки?

Для рѣшенія задачи надо найти сумму 7+7+7+7, т.-е. повторить число 7 слагаемыхъ 4 раза.

45. Что такое умноженіе. Ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ данномъ числѣ находится единицъ, наз. умноженіемъ.

Такъ, умножить 7 на 4 значитъ повторить число 7 слагаемымъ 4 раза, т.-е. найти сумму 7+7+7+7.

Такимъ образомъ, умноженіе представляетъ собою сложеніе одинаковыхъ слагаемыхъ и, слѣд., оно всегда можетъ быть выполнено посредствомъ обыкновеннаго сложенія. Но такое сложеніе очень утомительно въ томъ

случаѣ, когда число слагаемыхъ велико. Ариѳметика указываетъ болѣе удобный способъ нахожденія суммы одинаковыхъ слагаемыхъ посредствомъ особаго дѣйствія, называемаго умноженіемъ.

Число, которое должно повторить слагаемымъ, называется **множимымъ**, а число, которое показываетъ, сколько разъ надо множимое повторить слагаемымъ, называется **множителемъ**. Число, полученное послѣ умноженія, называется **произведеніемъ**. Напр.; когда 7 умножается на 4, то 7 есть множимое, 4—множитель, а получившееся послѣ умноженія число 28—произведеніе.

Множимое и множитель безразлично наз. **сомножителями**.

Принято обозначать умноженіе посредствомъ особаго знака. Если, напр., 7 надо умножить на 4, то пишутъ такъ: 7×4, или 7 . 4, т.-е. пишутъ множимое, справа отъ него знакъ умноженія (косой крестъ или точка), а справа отъ знака ставятъ множителя; такое обозначеніе замѣняетъ собою сумму 7+7+7+7.

Замѣчанія. 1) Множитель—всегда число отвлеченное, такъ какъ онъ означаетъ, *сколько разъ* множимое должно быть повторено слагаемымъ;

2) множимое можетъ означать единицы какого угодно названія, напр., аршины, рубли, карандаши и т. п.;

3) произведеніе должно означать единицы того же названія, какъ и множимое.

Такъ, если 7 рублей умножаются на 4, то получаются 28 рублей, а не какихъ-либо другихъ единицъ.

45,а. Нѣкоторые особые случаи умноженія. 1) **Если множимое есть 1, то произведеніе равно множителю**; такъ, 1×5=5, потому что сумма 1+1+ +1+1+1 составляетъ 5.

2) **Если множимое есть 0, то произведеніе равно 0; напр.,**

$0\times4=0$, потому что сумма $0+0+0+0$, какъ мы условились ранѣе (§ 24,*a*), должна считаться равной 0.

Такъ какъ повторить какое-нибудь число слагаемымъ одинъ разъ или ни одного раза, очевидно, нельзя, то, значить, множитель не можетъ быть ни 1, ни 0. Тѣмъ не менѣе допускаютъ умноженіе и на 1, и на 0, придавая этому умноженію слѣдующій условный смыслъ:

3) **Если множитель есть 1, то произведеніе равно множимому;** напр., произведеніе $5\times1=5$.

4) **Если множитель есть нуль, то произведеніе равно 0;** напр., $5\times0=0$.

46. Увеличеніе числа въ нѣсколько разъ. Увеличить число въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д.— значить повторить это число слагаемымъ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д. Напр., увеличить 10 въ 5 разъ—значить повторить 10 слагаемымъ 5 разъ, т.-е. умножить 10 на 5. Такимъ образомъ, увеличеніе числа въ нѣсколько разъ выполняется умноженіемъ (тогда какъ увеличеніе числа на какое-нибудь число выполняется сложеніемъ).

47. Перемѣстительное свойство произведенія. Возьмемъ какое-нибудь произведеніе, напр. 5×4. Оно представляетъ собою сумму:

$$5+5+5+5$$

Разложимъ каждое слагаемое этой суммы на отдѣльныя единицы:

первое слагаемое	=	1+1+1+1+1
второе »	=	1+1+1+1+1
третье »	=	1+1+1+1+1
четвертое »	=	1+1+1+1+1

Сумма должна содержать въ себѣ всѣ эти единицы. Со-

считаемъ ихъ. Если мы будемъ считать эти единицы горизонтальными строками, то получимъ: 5+5+5+5 (т.-е. 5×4); а если будемъ считать ихъ вертикальными столбцами, то найдемъ: 4+4+4+4+4 (т.-е. 4×5). Такъ какъ сумма не зависитъ отъ порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ, то въ результатѣ мы должны получить одно и то же число; слѣд.:

$$5\times4=4\times5.$$

Значитъ, **произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.** Свойство это наз. перемѣстительнымъ.

Замѣчанія. 1) Перемѣстительное свойство остается вѣрнымъ и тогда, когда множитель есть 1 или 0; такъ, 1×5=5 и 5×1=5; 0×4=0 и 4×0=0.

2) Надо однако имѣть въ виду, что, перемѣщая множимое со множителемъ, мы должны всегда множителя оставлять отвлеченнымъ; напр., нельзя писать: 8 руб.×3=3×8 руб., такъ какъ умноженіе на предметное число не имѣетъ смысла; правильно будетъ написать: 8 руб.×3=3 руб.×8.

48. Умноженіе однозначнаго числа на однозначное. Пусть требуется умножить 7 на 3. Для этого достаточно повторить 7 слагаемыхъ 3 раза:

$$7\times3=7+7+7=21$$

(семь да семь—четырнадцать, да еще семь—двадцать одинъ).

Чтобы умѣть быстро производить умноженіе всякихъ чиселъ, надо запомнить всѣ произведенія однозначныхъ чиселъ. Для этого составляютъ, при помощи сложенія, таблицу умноженія и заучиваютъ ее.

Таблица умноженія.

2×2= 4	2×3= 6	2×4= 8	2×5=10
3×2= 6	3×3= 9	3×4=12	3×5=15
4×2= 8	4×3=12	4×4=16	4×5=20
5×2=10	5×3=15	5×4=20	5×5=25
6×2=12	6×3=18	6×4=24	6×5=30
7×2=14	7×3=21	7×4=28	7×5=35
8×2=16	8×3=24	8×4=32	8×5=40
9×2=18	9×3=27	9×4=36	9×5=45
2×6=12	2×7=14	2×8=16	2×9=18
3×6=18	3×7=21	3×8=24	3×9=27
4×6=24	4×7=28	4×8=32	4×9=36
5×6=30	5×7=35	5×8=40	5×9=45
6×6=36	6×7=42	6×8=48	6×9=54
7×6=42	7×7=49	7×8=56	7×9=63
8×6=48	8×7=56	8×8=64	8×9=72
9×6=54	9×7=63	9×8=72	9×9=81

Обыкновенно эту таблицу заучиваютъ такъ:

2×2= 4 . . . . . дважды два—четыре
3×2= 6 . . . . . дважды три—шесть
. . . .
5×3=15 . . . . . трижды пять—пятнадцать

(т. е. произносятъ *сначала множителя*, а *потомъ множимое*).

При этомъ достаточно заучить только тѣ произведенія, которыя напечатаны крупно: остальныя отличаются отъ этихъ только порядкомъ сомножителей.

49. Умноженіе многозначнаго числа на однозначное. Пусть требуется умножить 846 на 5. Принято располагать дѣйствіе такъ:

```
 846
  ×5
────
4230
```

т.-е. пишутъ множимое, подъ нимъ множителя; подъ множителемъ проводятъ черту; сбоку ставятъ знакъ умноженія. Подъ чертою пишутъ цыфры произведенія по мѣрѣ того, какъ ихъ получаютъ.

Умножить 846 на 5 значитъ повторить 846 слагаемымъ 5 разъ. Для этого достаточно повторить 5 разъ сначала единицы множимаго, потомъ его десятки, затѣмъ сотни. Произведенія найдемъ по таблицѣ умноженія.

Пятью 6 . . . 30 ед., т.-е. 3 десятка; ставимъ 0 подъ чертою на мѣстѣ единицъ, а 3 десятка запоминаемъ.

Пятью 4 десятка—20 десятковъ; да 3 дес . . . 23 дес., т.-е. 2 сотни и 3 дес.; ставимъ 3 десятка подъ чертою на мѣстѣ десятковъ, а 2 сотни запоминаемъ.

Пятью 8 сотенъ... 40 сотенъ; да 2 сотни... 42 сотни; ставимъ подъ чертою 42 сотни, т.-е. 4 тысячи и 2 сотни.

Произведеніе 846 на 5 оказывается 4230.

50. Правило умноженія многозначнаго числа на однозначное. Пишутъ множимое, подъ нимъ множителя, подъ множителемъ проводятъ черту.

Умножаютъ (по таблицѣ умноженія) единицы множимаго на множителя. Если отъ этого получится однозначное число, то его пишутъ подъ чертою на мѣстѣ единицъ; если же получится двузначное число, то десятки его запоминаютъ, а единицы пишутъ подъ чертою.

Умножаютъ затѣмъ (по таблицѣ умноженія) десятки множимаго на множителя и къ полученному числу прикладываютъ въ умѣ то число десятковъ, которое могло получиться отъ умноженія единицъ. Если послѣ этого получится число однозначное, то его пишутъ подъ чертою на мѣстѣ десятковъ; если же получится число двузначное, то десятки его запоминаютъ, а единицы пишутъ подъ чертою.

Такъ же умножаютъ на множителя сотни множимаго, за сотнями—тысячи множимаго, и т. д.

Умноживши послѣднюю цыфру множимаго, пишутъ по-

лученное съ этого число, хотя бы оно было и двузначное, подъ чертою, влѣво отъ ранѣе написанныхъ цыфръ.

51. Умноженіе на 1 съ однимъ или съ нѣсколькими нулями. Пусть требуется умножить:

$$358 \times 10.$$

Умножить 358 на 10 значитъ повторить число 358 слагаемымъ 10 разъ. Чтобы легче узнать, сколько получится, повторимъ 10 разъ каждую изъ 358 единицъ. Одна единица, повторенная 10 разъ, дастъ десятокъ; значитъ, если каждую изъ 358 ед. повторимъ 10 разъ, то получимъ 358 десятковъ, что составляетъ 3580 единицъ.

Возьмемъ еще другой примѣръ:

$$296 \times 1000$$

Одна единица, повторенная 1000 разъ, составляетъ одну тысячу; слѣд., 296 единицъ, повторенныя 1000 разъ, составляютъ 296 тысячъ, что пишется такъ: **296000.**

Правило. Чтобы умножить число на единицу съ нулями, приписываютъ ко множимому справа столько нулей, сколько ихъ есть во множителѣ.

52. Умноженіе на какую-нибудь значащую цыфру съ однимъ или съ нѣсколькими нулями. Пусть требуется умножить:

$$248 \times 30$$

Умножить 248 на 30 значитъ повторить 248 слагаемымъ 30 разъ. Но 30 слагаемыхъ можно соединить въ 10 одинаковыхъ группъ, по 3 слагаемыхъ въ каждой группѣ:

248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
744	744	744	744	744	744	744	744	744	744

Вмѣсто того, чтобы 248 повторять слагаемымъ 3 раза,

мы можемъ умножить 248 на 3, и вмѣсто того, чтобы 744 повторять 10 разъ, мы можемъ умножить 744 на 10. Значитъ, для умноженія какого-нибудь числа на 30 достаточно умножить его на 3 и полученное произведеніе умножить на 10 (для чего надо приписать справа одинъ нуль):

$$248 \times 3 = 744; \qquad 744 \times 10 = 7440.$$

Возьмемъ еще другой примѣръ: 895×400.

Въ этомъ примѣрѣ требуется повторить число 895 слагаемымъ 400 разъ. Но 400 слагаемыхъ можно соединить въ 100 группъ по 4 слагаемыхъ въ каждой группѣ. Чтобы узнать, сколько единицъ въ одной группѣ, надо 895 умножить на 4 (получимъ 3580); чтобы затѣмъ узнать, сколько единицъ во всѣхъ группахъ, надо 3580 умножить на 100 (для чего достаточно приписать 2 нуля).

Дѣйствіе удобнѣе всего расположить так:

$$\begin{array}{r} 248 \\ \times 30 \\ \hline 7440 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 895 \\ \times 400 \\ \hline 358000 \end{array}$$

т.-е. множителя надо писать такъ, чтобы его нули стояли направо отъ множимаго.

Правило. Чтобы умножить число на какую-нибудь значащую цыфру съ нулями, умножаютъ множимое на эту значащую цыфру и къ произведенію приписываютъ справа столько нулей, сколько ихъ есть во множителѣ.

Замѣчаніе. Правило этого (и предыдущаго) параграфа выражено не совсѣмъ точно: умножать на цыфру нельзя, такъ какъ цыфра—не число, а письменный знакъ числа; когда мы умножаемъ на 7, мы умножаемъ не на цыфру 7, а на число, изображаемое этой цыфрою. Точно такъ же: не къ произведенію приписываются нули, а къ цыферному изображенію произведенія, и не столько нулей,

сколько ихъ есть во множителѣ, а столько нулей, сколько ихъ есть въ цыферномъ изображеніи множителя.

Однако, ради краткости рѣчи, мы будемъ и далѣе употреблять такія неправильныя выраженія, условившись понимать ихъ указаннымъ образомъ.

53. Умноженіе многозначныхъ чиселъ. Пусть требуется сдѣлать умноженіе

$$3826 \times 472.$$

Умножить 3826 на 472 значитъ повторить число 3826 слагаемымъ 472 раза. Для этого достаточно повторить 3826 слагаемымъ 2 раза, потомъ 70 разъ, потомъ 400 разъ и полученныя суммы соединить въ одну; другими словами, достаточно 3826 умножить на 2, потомъ на 70, затѣмъ на 400 и полученныя произведенія сложить.

3826	3826
×472	×472
7652	7652
267820	26782
1530400	15304
1805872	1805872

Дѣйствіе расположимъ такъ: пишемъ множимое, подъ нимъ множителя, подъ множителемъ проводимъ черту.

Умножаемъ множимое на 2 и полученное произведеніе пишемъ подъ чертою; это будетъ **первое частное произведеніе** (именно 7652).

Умножаемъ множимое на 70; для этого достаточно умножить множимое на 7 и къ произведенію приписать справа одинъ нуль; поэтому мы ставимъ 0 подъ цыфрою единицъ перваго частнаго произведенія, а цыфры, получаемыя отъ умноженія множимаго на 7, пишемъ, по порядку ихъ полученія, подъ десятками, сотнями и прочими разрядами перваго частнаго произведенія. Это будетъ **второе частное произведеніе** (267820).

Умножаемъ множимое на 400. Для этого достаточно умножить 3826 на 4 и къ произведенію приписать справа два нуля. Пишемъ два нуля подъ единицами и десятками второго частнаго произведенія, а цыфры, получаемыя отъ умноженія множимаго на 4, пишемъ, по порядку ихъ полученія, подъ сотнями, тысячами и прочими разрядами второго частнаго произведенія. Тогда получимъ **третье частное произведеніе** (1530400).

Подъ послѣднимъ частнымъ произведеніемъ проводимъ черту и складываемъ всѣ ихъ.

Для сокращенія письма обыкновенно не пишутъ нулей, указанныхъ нами жирнымъ шрифтомъ; при этомъ надо только помнить, что, умножая множимое на цыфру десятковъ множителя, мы должны писать первую полученную цыфру подъ десятками перваго частнаго произведенія; умножая на цыфру сотенъ множителя, пишемъ первую полученную цыфру подъ сотнями предыдущихъ частныхъ произведеній, и т. д.

Замѣчанія. 1) Если въ числѣ цыфръ множителя есть 1, то, умножая множимое на эту цыфру, надо имѣть въ виду, что, когда множитель есть 1, произведеніе принимается равнымъ множимому.

2) Когда во множителѣ встрѣчаются нули, то на нихъ не умножаютъ, а переходятъ прямо къ умноженію на слѣдующую значащую цыфру множителя.

Примѣръ:

```
      470827
       60013
 -----------
     1412481
     470827
  2824962
 -----------
 28255740751
```

54. Правило умноженія многозначныхъ чиселъ. Подписываютъ подъ множимымъ множителя и подъ множителемъ проводятъ черту.

Умножаютъ множимое только на значащія цыфры множителя: сначала на цыфру его единицъ, потомъ на цыфру его десятковъ, затѣмъ на цыфру сотенъ и т. д.

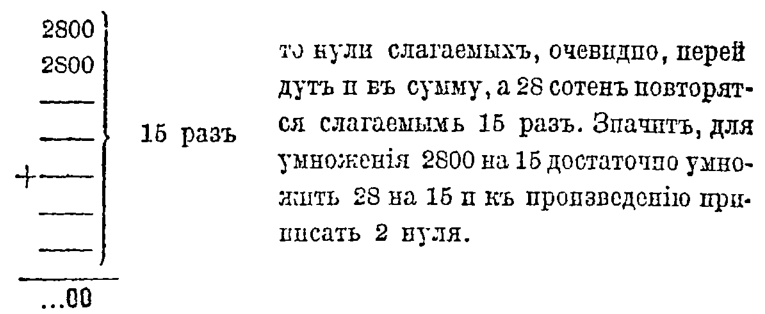
Получаемыя отъ этихъ умноженій частныя произведенія пишутъ подъ чертою одно подъ другимъ, наблюдая, чтобы первая справа цыфра каждаго частнаго произведенія стояла на одной вертикальной линіи съ тою цыфрою множителя, на которую умножаютъ.

Всѣ частныя произведенія складываютъ между собою.

55. Умноженіе чиселъ, оканчивающихся нулями. Сначала возьмемъ примѣръ, въ которомъ только одно множимое оканчивается нулями:

2800×15.

Умножить 2800 на 15 значитъ повторить 2800 слагаемымъ 15 разъ. Если станемъ находить эту сумму обыкновеннымъ сложеніемъ:



то нули слагаемыхъ, очевидно, перейдутъ и въ сумму, а 28 сотенъ повторятся слагаемымъ 15 разъ. Значитъ, для умноженія 2800 на 15 достаточно умножить 28 на 15 и къ произведенію приписать 2 нуля.

Дѣйствіе располагаютъ такъ:

2800	т.-е. пишутъ множителя такъ, чтобы нули множимаго стояли направо отъ множителя, производятъ умноженіе, не обращая вниманія на нули множимаго, а къ произведенію ихъ приписываютъ справа.
×15	
140	
28	
42000	

Возьмемъ теперь примѣръ, въ которомъ только одинъ множитель оканчивается нулями:

358×23000.

```
   358
×23000
  1074
 716
8234000
```

Чтобы повторить 358 слагаемымъ 23000 разъ, можно повторить 358 слагаемымъ 23 раза (т.-е. умножить 358 на 23) и полученное число повторить слагаемымъ 1000 разъ (т.-е. умножить на 1000, для чего достаточно приписать справа три нуля). Дѣйствіе располагаютъ такъ, какъ указано въ примѣрѣ.

Наконецъ, разсмотримъ примѣръ, въ которомъ оба данныя числа оканчиваются нулями:

$$57000 \times 3200.$$

```
  57000
 ×3200
  114
 171
182400000
```

Для умноженія 57000 на какое-нибудь число, надо умножить 57 на это число и къ произведенію приписать три нуля. Но чтобы умножить 57 на 3200, надо умножить 57 на 32 и къ произведенію приписать два нуля. Поэтому, когда множимое и множитель оканчиваются нулями, производятъ умноженіе, не обращая вниманія на нули и къ произведенію приписываютъ столько нулей, сколько ихъ есть во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ.

56. Умноженіе въ порядкѣ, обратномъ принятому. Во всѣхъ предыдущихъ примѣрахъ множимое умножалось сначала на единицы множителя, потомъ—на его десятки, затѣмъ—на его сотни, и т. д. Но можно производить умноженіе въ обратномъ порядкѣ. Напр.:

```
    2834        2834
    ×568        ×568
   22672    14170
  17004      17004
 14170        22672
 1609712    1609712
```

Единственная разница между этими пріемами умноженія—та, что, подписывая частныя произведенія одно подъ другимъ, приходится отступать влѣво, если дѣйствіе ведется по первому пріему, и вправо, если оно совершается по второму пріему. Первый пріемъ болѣе употребителенъ.

57. Провѣрка умноженія. Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей, то для повѣрки умноженія достаточно совершить его во второй разъ, умножая множителя на множимое. Напр.:

Умноженіе:	Повѣрка:
532	145
×145	×532
2660	290
2128	435
532	725
77140	77140

Оба произведенія оказались одинаковы; слѣд., весьма вѣроятно, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

58. Произведеніе трехъ и болѣе сомножителей. Пусть имѣемъ нѣсколько чиселъ, напр.: 7, 5, 3 и 4. Составимъ изъ нихъ произведеніе такимъ образомъ: умноживъ первое число на второе, получимъ 35; умноживъ 35 на третье число, получимъ 105; умноживъ 105 на четвертое число, получимъ 420. Число 420 называется произведеніемъ четырехъ сомножителей: 7, 5, 3 и 4.

Для обозначенія такихъ послѣдовательныхъ умноженій пишутъ данныя числа въ одну строку въ томъ порядкѣ, въ какомъ требуется производить надъ ними умноженіе, и ставятъ между ними знакъ умноженія. Такимъ образомъ, выраженіе:

$$3 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 7 \text{ или } 3\times4\times2\times7$$

равносильно такому: $[(3 \,.\, 4) \,.\, 2] \,.\, 7$,

т.-е. означаетъ, что 3 умножается на 4, полученное произведеніе—на 2 и это послѣднее произведеніе—на 7.

59. Перемѣстительное свойство произведеній. Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка сомножителей.

Мы уже убѣдились въ этомъ для произведенія двухъ сомножителей (§ 47). Это же свойство принадлежитъ и произведенію скольких угодно сомножителей. Напр., вычисливъ каждое изъ произведеній:

2. 5. 3. 4. 7 || 2. 3. 4 .5. 7 || 4. 7. 3. 2. 5 || 7. 2. 3. 4. 5,

отличающихся только порядкомъ сомножителей, мы получимъ одно и то же число 840.

Такъ какъ каждый изъ сомножителей можетъ быть поставленъ на концѣ, т.-е. можетъ быть принятъ за множителя, то всѣ они часто называются **множителями**.

59,а*. Доказательство перемѣстительнаго свойства. Чтобы доказать перемѣстительное свойство для всевозможныхъ произведеній, будемъ вести разсужденіе въ такой послѣдовательности.

Во-1) докажемъ, что **можно переставить, не измѣняя произведенія, двухъ рядомъ стоящихъ сомножителей**; напр., докажемъ, что если въ произведеніи 2. 5. **3. 4.** 7 переставимъ сомножителей 3 и 4, то произведеніе не измѣнится.

Отбросимъ пока послѣдняго сомножителя; тогда получимъ такое произведеніе: 2. 5. 3. 4 или 10. 3. 4. Чтобы вычислить это произведеніе, надо 10 повторить слагаемымъ 3 раза и полученное число повторить слагаемымъ 4 раза; значитъ:

$$10.3.4=(10+10+10)+(10+10+10)+$$
$$+(10+10+10)+(10+10+10).$$

Но сумму эту можно вычислить и такимъ образомъ: возьмемъ отъ каждаго слагаемаго суммы по 10; тогда получимъ 10+10+ +10+10, т.-е. 10 . 4; взявъ отъ каждаго слагаемаго еще 10, снова получимъ 10 . 4; наконецъ, взявъ въ третій разъ по 10, получимъ еще 10 . 4. Всего мы, такимъ образомъ, получимъ: (10 . 4)+(10 . 4)+(10 . 4), т.-е. 10 . 4 . 3.

Но сумма не зависитъ отъ того порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ; значитъ, 10 . 3 . 4=10 . 4 . 3. Умноживъ каждое изъ этихъ произведеній на отброшеннаго раньше сомножителя 7, мы не нарушимъ равенства между ними; тогда будемъ имѣть:

10 . 3 . 4 . 7=10 . 4 . 3 . 7

или 2 . 5 . 3 . 4 . 7=2 . 5 . 4 . 3 . 7

Во-2) докажемъ, что можно переставить, **не измѣняя произведенія, двухъ какихъ угодно сомножителей**; напр., докажемъ, что въ произведеніи 2 . 5 . 3 . 4 . 7 можно переставить сомножителей 5 и 7.

Сомножителя 5 можно переставить съ 3, потому что эти сомножители стоятъ рядомъ. Затѣмъ, по той же причинѣ, 5 можно переставить съ 4 и, наконецъ, съ 7. Такимъ образомъ сомножитель 5 будетъ переведенъ на то мѣсто, которое занималъ прежде сомножитель 7, и мы будемъ имѣть произведеніе 2 . 3 . 4 . 7 . 5. Переставляя теперь сомножителя 7 съ 4, а потомъ съ 3, мы переведемъ его на то мѣсто, которое прежде занималъ сомножитель 5. Такимъ образомъ:

2 . 5 . 3 . 4 . 7=2 . 7 . 3 . 4 . 5

Наконецъ, въ 3) докажемъ, что **произведеніе не измѣнится, если переставимъ его сомножителей какъ угодно**; напр., докажемъ, что въ произведеніи 2 . 5 . 3 . 4 . 7 сомножителей можно переставить такъ: **3 . 7 . 5 . 4 . 2**.

Сравнивая послѣднее произведеніе съ даннымъ, видимъ, что сомножитель 3 долженъ стоять на 1-мъ мѣстѣ. Для этого мы помѣняемъ его мѣстами съ 2, что можно сдѣлать по доказанному раньше. Тогда получимъ новое произведеніе 3 . 5 . 2 . 4 . 7. Теперь сомножителя 7 переведемъ на второе мѣсто; для этого переставимъ его съ 5; получимъ 3 . 7 . 2 . 4 . 5 . Въ этомъ произведеніи переставимъ 5 съ 2; тогда получимъ: **3 . 7 . 5 . 4 . 2**. Теперь всѣ сомножители приведены въ требуемый порядокъ, при чемъ произведеніе ни разу не измѣнилось.

60. Какъ умножить на произведеніе. Мы видѣли (§ 52), что если требуется умножить какое-нибудь

число на 30 (т.-е. на произведеніе 3 . 10), то достаточно умножить это число на 3 и полученное число умножить на 10; также для умноженія какого-нибудь числа на 400 (т.-е. на произведеніе 4 . 100) можно умножить это число на 4 и полученное число на 100. Подобнымъ образомъ можно поступать всегда, если множитель представляетъ собою произведеніе. Пусть, напр., требуется умножить 10 на 12, т.-е. на произведеніе 3 . 4. Для этого достаточно 10 умножить на 3 и полученное произведеніе умножить еще на 4. Дѣйствительно, умножить 10 на 12 значитъ найти сумму:

$$10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10+10.$$

Но сумму эту мы можемъ вычислить, соединивъ слагаемыя въ 4 одинаковыхъ группы по 3 слагаемыхъ въ каждой группѣ:

$$(10+10+10)+(10+10+10)+(10+10+10)+(10+10+10);$$

тогда въ каждой группѣ единицъ будетъ 10 . 3, а во всѣхъ группахъ ихъ окажется 10 . 3 . 4. Значитъ:

$$10\times(3\times4)=10\times3\times4.$$

Подобно этому можно убѣдиться, что

$$7\,.\,(2\,.\,3\,.\,4)=7\,.\,2\,.\,3\,.\,4$$

Правило. Чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе нѣсколькихъ чиселъ, достаточно умножить множимое на перваго сомножителя, полученное число умножить на второго сомножителя, потомъ на третьяго, и т. д.

Этимъ правиломъ пользуются иногда при **устномъ умноженіи**; напр., чтобъ умножить 36 на 8 (т.-е. на произведеніе 2 . 2 . 2), можно 36 удвоить (получимъ 72), еще удвоить (получимъ 144) и еще разъ удвоить (получимъ 288).

61. Сомножителей произведенія можно соединять въ группы. Убѣдимся еще въ слѣдую-

щемъ свойствѣ: **произведеніе не измѣнится, если какихъ-нибудь сомножителей мы замѣнимъ ихъ произведеніемъ.**

Напр., какъ мы сейчасъ видѣли, произведеніе 10 . 3 . 4 даетъ такое же число, какъ и произведеніе 10 . (3 . 4); или произведеніе 7 . 2 . 3 . 4 даетъ такое же число, какъ и произведеніе 7 . (2 . 3 . 4).

Этимъ свойствомъ иногда пользуются для болѣе удобнаго вычисленія произведенія. Напр., чтобы вычислить произведеніе 25 . 7 . 4 . 8, всего удобнѣе сгруппировать сомножителей такъ: 25 . 4=100; 7 . 8=56; 56 . 100=5600.

61,a*. Сочетательное и распредѣлительное свойства произведенія. Свойства, изложенныя въ §§ 60 и 61, составляютъ въ сущности одно и то же свойство, которое можетъ быть выражено такимъ равенствомъ (если сомножителей взято 3):

$$a\,(b\,c)=a\,b\,c \quad \text{или} \quad a\,b\,c=a\,(b\,c).$$

Свойство это наз. **сочетательнымъ свойствомъ произведенія.**

Къ свойствамъ перемѣстительному и сочетательному надо еще добавить третье свойство произведенія, **распредѣлительное,** выражаемое равенствомъ (если сомножителей взято три):

$$(a+b)c=ac+bc \text{ или } c(a+b)=ca+cb,$$

т.-е., **чтобы умножить сумму на какое-нибудь число, достаточно умножить на это число каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить;**

или **чтобы умножить какое-нибудь число на сумму, достаточно умножить это число на каждое слагаемое отдѣльно и результаты сложить.**

Дѣйствительно, на основаніи опредѣленія умноженія и свойствъ перемѣстительнаго и сочетательнаго можемъ написать:

$$\begin{aligned}(a+b)c&=(a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots..(c \text{ разъ})\\&=a+b+a+b+a+b+\ldots.\\&=(a+a+a+\ldots)+(b+b+b+\ldots)\\&=ac+bc.\end{aligned}$$

62. Степень. Произведеніе нѣсколькихъ одинаковыхъ сомножителей называется степенью, при чемъ про-

изведеніе двухъ одинаковыхъ сомножителей называется **второй степенью**, произведеніе трехъ одинаковыхъ сомножителей называется **третьей степенью**, и т. д.

Такъ, произведеніе 5 . 5, т.-е. 25, есть вторая степень 5-и, произведеніе 3 . 3 . 3, т.-е. 27, есть третья степень 3-хъ, произведеніе 2 . 2 . 2 . 2, т.-е. 16, есть четвертая степень 2-хъ.

Степени выражаютъ сокращенно такъ:

$2 . 2 . 2 = 2^3$ (2 въ 3-й степени),

$3 . 3 . 3 . 3 = 3^4$ (3 въ 4-й степени) и т. п.,

т.-е. пишутъ число, которое берется сомножителемъ, и надписываютъ надъ нимъ съ правой стороны другое число, показывающее, сколько въ степени одинаковыхъ сомножителей; это второе число называется **показателемъ степени.**

VIII. Дѣленіе.

Задача 1. Роздано 24 листа бумаги поровну 6-ти ученикамъ. Сколько листовъ получилъ каждый ученикъ?

Для рѣшенія задачи надо разложить 24 листа на 6 равныхъ частей. Предположимъ, что въ каждой части будетъ по 2 листа; тогда всѣ 6 частей составили бы 2×6, т.-е. 12 листовъ, что меньше 24-хъ; предположимъ, что въ каждой части будетъ по 3 листа; тогда число, которое разлагается на части, было бы 3×6, т.-е. 18, что все-таки меньше 24-хъ. Допустимъ, что въ каждой части окажется 4 листа; тогда въ 6-ти частяхъ будетъ 4×6, т.-е. ровно 24 листа. Значитъ, каждый ученикъ получитъ по 4 листа.

Мы видимъ, что въ этой задачѣ требуется найти такое число, которое надо умножить на 6, чтобы получить 24; другими словами, въ задачѣ требуется по данному произведенію 24 и множителю 6 отыскать множимое.

Задача 2. Роздано ученикамъ 24 листа бумаги по 6 листовъ каждому. Сколько учениковъ получили бумагу?

Для рѣшенія задачи надо узнать, сколько разъ отъ 24 листовъ можно отнимать по 6 листовъ, или, другими словами, сколько разъ въ 24 (листахъ) содержатся 6 (листовъ). Предположимъ, что только 2 раза; тогда все число листовъ было бы 6×2, т.-е. 12, что меньше 24-хъ. Предположимъ, что 6 листовъ содержатся 3 раза; тогда всѣхъ листовъ было бы 6×3, т.-е. 18, что все-таки меньше 24. Допустимъ, что 6 листовъ содержатся 4 раза; тогда, всѣхъ листовъ было бы 6×4, т.-е. ровно 24. Значитъ, 6 листовъ содержатся въ 24 листахъ 4 раза, и потому по 6 листовъ получили 4 ученика.

Въ этой задачѣ требуется найти число, на которое надо умножить 6, чтобы получить 24; здѣсь по данному произведенію 24 и данному множимому 6 требуется найти множителя.

63. Что такое дѣленіе. Ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію и одному изъ сомножителей отыскивается другой сомножитель, наз. дѣленіемъ. Такъ, раздѣлить 24 на 6 значитъ узнать: какое число слѣдуетъ умножить на 6, чтобы получить въ произведеніи 24 (другими словами: требуется найти шестую часть 24-хъ); или на какое число слѣдуетъ умножить 6, чтобы получить въ произведеніи 24 (другими словами, требуется узнать, сколько разъ 6 содержится въ 24-хъ).

При дѣленіи данное произведеніе наз. **дѣлимымъ**, данный сомножитель—**дѣлителемъ**, а искомый сомножитель—**частнымъ**. Такъ, въ приведенномъ примѣрѣ 24 есть дѣлимое, 6—дѣлитель, а искомое число, т.-е. 4—частное.

Дѣленіе обозначается знакомъ :, который ставятъ между дѣлимымъ и дѣлителемъ, при чемъ дѣлимое пишется налѣво, а дѣлитель—направо отъ этого знака; напр., 24 : 6. Какъ знакъ дѣленія, употребляется также и **черта**, при чемъ дѣлимое пишутъ надъ чертою, а дѣлителя подъ ней; напр.: $\frac{24}{6}$.

Дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію, потому что при дѣленіи дается то, что отыскивается при умноженіи (т.-е. произведеніе), а отыскивается одно изъ тѣхъ чиселъ, которыя даются при умноженіи (множимое или множитель).

64. Важное свойство частнаго. Величина частнаго не зависитъ отъ того, означаетъ ли оно множимое или множителя. Пусть, напр., дѣлимое будетъ 24, а дѣлитель 6. Искомое частное можетъ означать или множимое, или множителя. Въ первомъ случаѣ оно означаетъ такое число, которое надо умножить на 6, чтобы получить 24. Во второмъ случаѣ оно означаетъ такое число, на которое надо умножить 6, чтобы получить 24. Такъ какъ произведеніе не измѣняется, когда мы множимое и множителя помѣняемъ мѣстами, то въ обоихъ случаяхъ искомое число должно быть одно и то же, именно 4, такъ какъ:

если $4 \times 6 = 24$, то и $6 \times 4 = 24$.

Такимъ образомъ, узнаёмъ ли мы шестую часть 24-хъ, или узнаёмъ, сколько разъ 6 содержится въ 24, въ обоихъ случаяхъ получаемъ одно и то же число 4.

65. Дѣленіе съ остаткомъ. Пусть требуется раздѣлить 27 на 6. Пробуя умножать число 6 на 1, 2, 3, 4, 5...., мы замѣчаемъ, что ни одно изъ произведеній не равно 27. Значитъ, предложенное дѣленіе нельзя выполнить. Однако, мы условимся говорить: «раздѣлить 27 на 6», разумѣя при этомъ, чтобы было раздѣлено или все дѣлимое, если это возможно, или же **наибольшая часть** дѣлимаго, какая только можетъ раздѣлиться на дѣлителя. Такъ, наибольшая часть 27-и, дѣлящаяся на 6, есть 24; это число и требуется раздѣлить, когда говорятъ: «раздѣлить 27 на 6».

При такомъ дѣленіи можетъ получиться **остатокъ**, т.-е. избытокъ дѣлимаго надъ тою его частью, которая дѣлится. Такъ, дѣля 27 на 6, мы получаемъ въ остаткѣ число 3. Очевидно, остатокъ всегда меньше дѣлителя.

Когда дѣленіе происходитъ съ остаткомъ, то получившееся при этомъ частное наз. **приближеннымъ частнымъ.** Такъ, дѣля 27 на 6, мы получаемъ приближенное частное 4. Дѣйствіе можно обозначить такъ:

27 : 6=4 (ост. 3),

помѣщая въ скобкахъ остатокъ отъ дѣленія.

Конечно, приближенное частное тоже имѣетъ двоякое значеніе, смотря по тому, означаетъ ли оно множимое или множителя. Такъ, дѣленіе 27 : 6=4 (ост. 3) означаетъ: или, что, раздѣливъ 27 на 6 равныхъ частей, мы получимъ въ каждой части по 4 единицы, при чемъ 3 ед. останутся не раздѣленными; или, что въ 27 число 6 содержится 4 раза, при чемъ еще остаются 3 единицы.

Въ отличіе отъ приближеннаго то частное, которое получается тогда, когда дѣленіе совершается безъ остатка, наз. **точнымъ** частнымъ. Впрочемъ, для сокращенія рѣчи точное частное и приближенное мы будемъ просто называть **частнымъ.**

Когда дѣленіе совершается съ остаткомъ, то **дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное плюсъ остатокъ.**

Такъ, если 84 : 10=8 (ост. 4), то 84 =10×8+4.

Дѣйствительно, когда мы умножимъ приближенное частное на дѣлителя, то получимъ ту часть дѣлимаго, которая была раздѣлена; если же приложимъ къ этому произведенію остатокъ, то получимъ все дѣлимое.

Когда дѣленіе совершается безъ остатка, то **дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное.**

66. Когда употребляется дѣленіе. При рѣшеніи задачъ дѣленіе употребляется въ слѣдующихъ 4-хъ случаяхъ:

1) Когда надо узнать, **сколько разъ меньшее число содержится въ бóльшемъ.** Такъ, чтобы опредѣлить, сколько разъ 8 руб. содержатся въ 48 руб., достаточно найти, на какое число слѣдуетъ умножить 8 руб., чтобы

получить 48 руб.; здѣсь по произведенію 48 и множимому 8 требуется отыскать множителя; а это узнается дѣленіемъ (8 руб. въ 48 руб. содержится 6 разъ).

2) Когда надо узнать, **во сколько разъ одно число больше или меньше другого числа**, потому что узнать это—значитъ опредѣлить, сколько разъ бо́льшее число содержитъ въ себѣ меньшее. Такъ, узнать, во сколько разъ 63 больше 9 (или во сколько разъ 9 меньше 63) значитъ опредѣлить, сколько разъ 63 содержитъ въ себѣ 9. Поэтому, этотъ случай въ сущности представляетъ собою случай 1-й, но только онъ выраженъ другими словами.

3) Когда требуется **какое-нибудь число разложить на нѣсколько равныхъ частей.** Пусть, напр., требуется разложить 60 на 12 равныхъ частей. Для этого достаточно опредѣлить, какое число надо умножить на 12, чтобы получить 60; здѣсь по произведенію 60 и множителю 12 требуется отыскать множимое; а это узнается дѣленіемъ (искомая часть равна 5).

4) Когда требуется **какое-нибудь число уменьшить въ нѣсколько разъ**, потому что уменьшить, напр., 60 въ 12 разъ значитъ разложить 60 на 12 равныхъ частей и вмѣсто 60-и взять одну часть. Такимъ образомъ, этотъ случай представляетъ собою тотъ же случай 3-й, но выраженный иными словами.

Итакъ, можно сказать, что дѣленіе употребляется только въ двухъ случаяхъ: 1) когда требуется узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, и 2) когда данное число требуется разложить на нѣсколько равныхъ частей.

67. Наименованіе единицъ дѣлимаго, дѣлителя и частнаго. Когда дѣленіемъ узнается, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, то дѣлимое и дѣлитель (а также и остатокъ, если онъ есть) могутъ означать какія угодно единицы, но только о д н о г о и

того же наименованія; при этомъ частное показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, и потому его можно разсматривать, какъ число отвлеченное; напр., въ 50 рубляхъ (дѣлимое) 8 рублей (дѣлитель) содержатся 6 разъ (частное), при чемъ 2 рубля получаются въ остаткѣ.

Когда же дѣленіемъ узнается часть дѣлимаго, то дѣлитель разсматривается, какъ число отвлеченное, показывающее, на сколько равныхъ частей разлагается дѣлимое; дѣлимое же и частное (а также и остатокъ, если онъ есть) могутъ выражать какія угодно единицы, но только одного и того же наименованія; напр., раздѣливъ 62 пера на 12 (равныхъ частей), получимъ 5 перьевъ и остатокъ 2 пера.

Обыкновенно при обозначеніи дѣйствія не пишутъ названій единицъ, а только подразумѣваютъ.

68. Дѣленіе можно выполнить посредствомъ сложенія, вычитанія и умноженія. Пусть требуется раздѣлить 212 на 53. Искомое частное мы можемъ найти:

1) Сложеніемъ: $53+53=106$; $106+53=159$; $159+53=212$.

Оказывается, что 53 надо повторить слагаемымъ 4 раза, чтобы получить 212; значитъ, искомое частное есть 4.

2) Вычитаніемъ:

$$\begin{array}{r}212\\-53\\\hline 159\end{array}\qquad\begin{array}{r}159\\-53\\\hline 106\end{array}\qquad\begin{array}{r}106\\-53\\\hline 53\end{array}\qquad\begin{array}{r}53\\-53\\\hline 0\end{array}$$

Оказывается, что 53 отъ 212 можно отнимать 4 раза; значитъ, искомое частное есть 4.

3) Умноженіемъ: $53\times2=106$; $53\times3=159$; $53\times4=212$. Искомый сомножитель, т.-е. частное, есть 4.

Однако эти способы неудобны, если частное большое число; ариѳметика указываетъ болѣе простой пріемъ, который мы теперь и разсмотримъ.

69. Какъ узнать, будетъ ли частное однозначное или многозначное. Легко узнать, будетъ ли частное менѣе или болѣе 10-и. Для этого стоитъ только умножить (въ умѣ) дѣлителя на 10 и сравнить полученное произведеніе съ дѣлимымъ.

Примѣръ 1. 534 : 37=?

Если 37 умножимъ на 10, то получимъ 370; дѣлимое больше 370; значитъ, оно больше дѣлителя, повтореннаго 10 разъ, и потому частное должно быть 10 или больше 10, т.-е. оно выражается по меньшей мѣрѣ 2-мя цыфрами (есть число многозначное).

Примѣръ 2. 534 : 68=?

Если 68 умножимъ на 10, то получимъ 680; дѣлимое меньше 680; значитъ, частное должно быть менѣе 10, т.-е. оно выражается одною цыфрою (есть число однозначное).

Покажемъ сначала, какъ находится частное однозначное, а затѣмъ и многозначное.

70. Нахожденіе однозначнаго частнаго. Разсмотримъ два случая: когда дѣлитель тоже однозначный и когда дѣлитель многозначный.

1) **При однозначномъ дѣлителѣ однозначное частное находится по таблицѣ умноженія.** Напр., частное 56 : 8 равно 7, потому что, перебирая по таблицѣ умноженія различныя произведенія числа 8, находимъ, что семью 8 какъ разъ 56; отъ дѣленія 42 : 9 получается неточное частное 4, такъ какъ четырежды 9 равно 36, что меньше 42, а пятью 9 составляетъ 45, что больше 42; значитъ, въ частномъ надо взять 4, при чемъ въ остаткѣ получится 6.

2) **При многозначномъ дѣлителѣ однозначное частное на-**

ходится посредствомъ испытанія одной или нѣсколькихъ цыфръ.

Примѣръ. 43530 : 6837.

Зачеркнемъ въ дѣлителѣ всѣ цыфры, кромѣ первой слѣва, т.-е. возьмемъ изъ дѣлителя только 6 тысячъ. Въ дѣлимомъ зачеркнемъ справа столько же цыфръ, сколько ихъ зачеркнули въ дѣлителѣ, т.-е. возьмемъ изъ дѣлимаго только 43 тысячи. Теперь зададимся вопросомъ, на какую цыфру надо умножить 6, чтобы получить 43 или число, близкое къ 43? Изъ таблицы умноженія находимъ, что если 6 умножимъ на 7, то получимъ 42, а если 6 умножимъ на 8, то окажется 48. Значитъ искомое частное не можетъ быть больше 7; но оно можетъ быть 7 или меньше 7 (меньше 7-ми оно окажется тогда, когда отброшенныя нами въ дѣлителѣ 837 ед., будучи умножены на 7, составятъ такое число, которое превзойдетъ 1 тысячу, оставшуюся отъ 43 тысячъ дѣлимаго, вмѣстѣ съ 530 единицами). Начнемъ испытаніе съ цыфры 7. Для этого умножимъ дѣлителя на 7:

$$\begin{array}{r} 6837 \\ \times \quad 7 \\ \hline 47859 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6837 \\ \times \quad 6 \\ \hline 41022 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,43530 \\ 41022 \\ \hline 2508 \end{array}$$

Произведеніе оказалось больше дѣлимаго; значитъ, цыфра 7 не годится. Испытаемъ слѣдующую меньшую цыфру 6. Для этого умножимъ дѣлителя на 6. Произведеніе оказалось меньше 43530; значитъ, частное должно быть 6, при чемъ получается остатокъ 2508.

71. Замѣчаніе. Первую цыфру для испытанія можно найти иначе. Возьмемъ тотъ же примѣръ:

43530 : 6837

Замѣтивъ, что дѣлитель очень мало отличается отъ 7 тысячъ, узнаемъ, на какую цыфру надо умножить не 6,

а 7, чтобы получить число, близкое къ 43. По таблицѣ умноженія находимъ, что шестью 7... 42, а семью 7... 49. Слѣд., если бы дѣлитель былъ 7000, то цыфра частнаго была бы 6. Но дѣлитель меньше 7000; значитъ, цыфра частнаго можетъ быть и больше 6. Начнемъ испытаніе съ цыфры 6. Для этого умножимъ дѣлителя на 6 и вычтемъ произведеніе изъ дѣлимаго; если останется больше дѣлителя, то цыфра 6 мала, и тогда надо испытать цыфру 7; а если останется меньше дѣлителя, то цыфра 6 годится. Остатокъ (2508) оказался меньше дѣлителя; значитъ, цыфра 6 годится.

Такъ полезно поступать тогда, когда **вторая цыфра дѣлителя больше 5**. Напр., дѣлитель 6837, благодаря тому, что у него вторая цыфра больше 5, ближе подходитъ къ 7000, чѣмъ къ 6000.

72. Нахожденіе многозначнаго частнаго.

При объясненіи способа нахожденія многозначнаго частнаго мы будемъ предполагать, что дѣлитель означаетъ множимое, а искомое частное означаетъ множителя, т.-е. что дѣленіемъ мы узнаемъ, *сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ*.

Примѣръ. 64528 : 23=?

Отдѣлимъ дѣлителя отъ дѣлимаго вертикальною чертою; подъ дѣлителемъ проведемъ горизонтальную черту; подъ этою чертою будемъ писать цыфры частнаго по мѣрѣ ихъ нахожденія.

```
64528| 23
46||  2804
---
185'
184 '
-----
  128
   92
  ---
   36
```

Опредѣлимъ сначала, какой высшій разрядъ будетъ въ частномъ.

Въ дѣлимомъ высшій разрядъ — десятки тысячъ, а потому прежде всего узнаемъ, не будутъ ли и въ частномъ десятки тысячъ? Десятковъ тысячъ въ частномъ не будетъ, потому что число 23, повторенное 10000 разъ, составляетъ 23 десятка тысячъ,

а въ дѣлимомъ только 6 десятковъ тысячъ. Будутъ ли въ частномъ тысячи? Число 23, повторенное 1000 разъ, составляетъ 23 тысячи; въ нашемъ дѣлимомъ тысячъ болѣе 23; значитъ, въ немъ число 23 содержится болѣе 1000 разъ, и потому въ частномъ будутъ тысячи.

Чтобы узнать, сколько тысячъ въ частномъ, примемъ во вниманіе, что 23 *содержится 1000 разъ въ 23 тысячахъ*; но 23 тысячи въ 64 тысячахъ повторяются 2 раза; слѣд., 23 въ 64 тысячахъ содержится 1000 да еще 1000 разъ, т.-е. 2 тысячи разъ. Ставимъ въ частномъ цыфру 2 и будемъ помнить, что эта цыфра означаетъ тысячи.

```
64528 |23
46    |2804
---
185
184
---
  128
   92
  ---
   36
```

Умножимъ 23 на 2 тысячи и вычтемъ полученное число изъ дѣлимаго. Чтобы умножить 23 на 2 тысячи, достаточно умножить 23 на 2 и полученное число на тысячу. Получимъ 46 тысячъ. Подпишемъ 46 подъ тысячами дѣлимаго и вычтемъ.

Отъ 64 тысячъ остается 18 тысячъ, а отъ всего дѣлимаго должны остаться эти 18 тыс., да еще 528 един.; значитъ, полный остатокъ будетъ 18528. Въ этомъ числѣ 23 не можетъ содержаться ни одной тысячи разъ, потому что оно менѣе 23 тысячъ.

Чтобы узнать, сколько сотенъ въ частномъ, возьмемъ въ полномъ остаткѣ только 185 сотенъ (для чего снесемъ къ остатку отъ тысячъ слѣдующую цыфру дѣлимаго 5) и примемъ во вниманіе, что 23 *содержится 100 разъ въ 23 сотняхъ*; но 23 сотни въ 185 сотняхъ повторяются 8 разъ; слѣд., 23 въ 185 сотняхъ содержится 8 сотенъ разъ. Пишемъ въ частномъ цыфру 8 направо отъ ранѣе написанной цыфры 2, такъ какъ сотни ставятся направо отъ тысячъ. Умножимъ 23 на 8 сотенъ и вычтемъ полученное число, т.-е. 184 сотни, изъ 185 сотенъ. Отъ сотенъ останется одна сотня, а отъ всего дѣлимаго останется еще 28 ед.; зна-

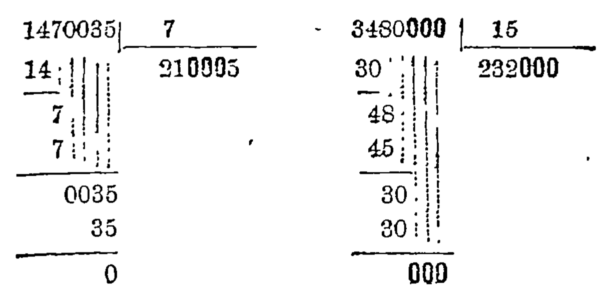
чить, полный остатокъ будетъ 128. Въ этомъ остаткѣ 23 не можетъ содержаться ни одной сотни разъ, потому что 128 менѣе 23 сотенъ.

Чтобы узнать, сколько десятковъ въ частномъ, возьмемъ въ полномъ остаткѣ только одни десятки (для чего снесемъ къ остатку отъ сотенъ слѣдующую цыфру дѣлимаго 2) и примемъ во вниманіе, что 23 содержится 10 разъ въ 23 десяткахъ; но 23 десятка въ 12 десяткахъ не содержатся ни разу; слѣд., 23 въ 12 десяткахъ не содержится ни одного десятка разъ; поэтому десятковъ въ частномъ не будетъ вовсе. Пишемъ въ частномъ цыфру 0 направо отъ прежде написанныхъ (потому что десятки пишутся направо отъ сотенъ) и сносимъ слѣдующую цыфру дѣлимаго 8, чтобы имѣть полный остатокъ.

Остается узнать, сколько простыхъ единицъ въ частномъ. 23 въ 128 содержатся 4 раза. Пишемъ въ частномъ цыфру 4 направо отъ прежде написанныхъ цыфръ, умножаемъ на нее 23 и вычитаемъ произведеніе изъ 128; тогда получимъ послѣдній остатокъ 36.

Такъ какъ въ частномъ мы писали цыфры въ порядкѣ, принятомъ нумераціей, то остается только прочесть число, написанное подъ чертою: 2804.

Вотъ еще 2 примѣра дѣленія:



73*. Другое объясненіе. Въ предыдущемъ параграфѣ мы объясняли нахожденіе частнаго, разсматривая дѣленіе, какъ дѣйствіе, которымъ узнается, сколько разъ дѣлитель содер-

жится въ дѣлимомъ. Но можно вести объясненіе иначе, разсматривая дѣленіе, какъ разложеніе даннаго числа на равныя части. Объяснимъ это на томъ же примѣрѣ:

64528 : 23

Это значитъ: разложить 64528 ед. на 23 равныя части (напр., раздѣлить 64528 рублей поровну между 23 человѣками). По десятку тысячъ въ каждой части не получится, но получится по нѣсколько тысячъ. Чтобы узнать, по скольку именно, возьмемъ въ дѣлимомъ 64 тысячи и разложимъ ихъ на 23 равныя части. Въ каждой части получится 2 тысячи. Пишемъ въ частномъ цыфру 2. Если въ каждой части 2 тысячи, то въ 23 частяхъ ихъ будетъ 46. Вычитаемъ 46 тыс. изъ 64 тысячъ; остается 18 тысячъ, которыя предстоитъ разложить на 23 равныя части. Очевидно, тысячи не получится. Раздробимъ 18 тысячъ въ сотни и приложимъ къ нимъ 5 сотенъ дѣлимаго, чтобы и ихъ заразъ разложить на 23 равныя части. Получимъ 185 сотенъ. Разложивъ ихъ на 23 равныя части, получимъ въ каждой части по 8 сотенъ. Пишемъ въ частномъ цыфру 8 на мѣстѣ сотенъ. Умноживъ 8 на 23, узнаемъ, что во всѣхъ частяхъ сотенъ будетъ 184; вычитаемъ ихъ изъ 185. Остается 1 сотня, которую предстоитъ разложить на 23 равныя части. Раздробимъ ее въ десятки и къ нимъ прибавимъ 2 десятка дѣлимаго, чтобы заразъ и ихъ разложить на 23 равныя части; получимъ 12 десятковъ. Отъ дѣленія ихъ на 23 равныя части въ частномъ не получимъ десятковъ; ставимъ въ частномъ цыфру 0 на мѣстѣ десятковъ. Раздробимъ 12 десятковъ въ единицы и приложимъ 8 ед. дѣлимаго; получимъ 128 ед. Раздѣливъ ихъ на 23, найдемъ 4 ед. Пишемъ цыфру 4 въ частномъ на мѣстѣ единицъ.

74. Правило дѣленія. Пишутъ дѣлимое и дѣлителя въ одной горизонтальной строкѣ, отдѣливъ ихъ другъ отъ друга вертикальною чертою. Подъ дѣлителемъ проводятъ горизонтальную черту, подъ которою пишутъ цыфры частнаго по мѣрѣ ихъ полученія.

Отдѣляютъ въ дѣлимомъ отъ лѣвой руки къ правой

столько цыфръ, чтобы изображаемое ими число содержало дѣлителя, но менѣе 10 разъ.

Дѣлятъ отдѣленную часть дѣлимаго на дѣлителя (какъ было объяснено раньше).

Полученную цыфру пишутъ въ частномъ.

Умножаютъ дѣлителя на найденную цыфру частнаго и произведеніе вычитаютъ изъ отдѣленной части дѣлимаго.

Къ остатку сносятъ слѣдующую вправо цыфру дѣлимаго и полученное послѣ снесенія число дѣлятъ на дѣлителя (какъ было объяснено раньше); цыфру отъ этого дѣленія пишутъ въ частномъ направо отъ ранѣе написанной цыфры.

Умножаютъ дѣлителя на вторую цыфру частнаго и произведеніе вычитаютъ изъ того числа, которое было раздѣлено для полученія второй цыфры частнаго.

Къ остатку сносятъ слѣдующую цыфру дѣлимаго и полученное послѣ снесенія число дѣлятъ на дѣлителя.

Продолжаютъ такъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ дѣлимомъ не окажется цыфръ для снесенія.

Если въ остаткѣ, послѣ снесенія къ нему надлежащей цыфры дѣлимаго, получится число, меньшее дѣлителя, то пишутъ въ частномъ 0, а къ остатку сносятъ слѣдующую цыфру дѣлимаго.

75. Сокращенный способъ дѣленія. Когда дѣлитель однозначный, то для сокращенія письма полезно привыкнуть производить въ умѣ всѣ вычитанія, выписывая только остатки. Напр., такъ:

```
563087 | 6
  23   | 93847
   50
    28
     47
      5
```

или еще короче:

```
563087 | 6
-------|------
     5 | 93847
```

гдѣ цыфра 5 подъ чертою означаетъ послѣдній остатокъ.

75*, а. Можно не писать вычитаемыхъ и при всякомъ дѣле-

нія; при этомъ лучше всего вычитаніе производить такъ, какъ будетъ объяснено на слѣдующемъ примѣрѣ:

4830278	5648	Умножаемъ 5648 на 8 и производимъ
31187	855	вычитаніе изъ 48302 такъ: восемью
29478		8... 64; 64 изъ 2 вычесть нельзя: при-
1238		бавляемъ къ 2 число 70; 64 изъ 72,
		остается 8; пишемъ 8 подъ цыфрою 2.

Замѣтивъ теперь, что мы увеличили уменьшаемое на 70 сотенъ, т.-е. на 7 тысячъ, запомнимъ цыфру 7 съ тѣмъ, чтобы настолько же увеличить потомъ и вычитаемое; восемью 4... 32 да 7 (въ умѣ)... 39; 39 изъ 40... 1 (мы увеличили уменьшаемое на 40 тысячъ, т.-е. на 4 дес. тысячъ); пишемъ 1 подъ цыфрою 0, а 4 запоминаемъ. Восемью 6... 48 да 4 (въ умѣ) 52; 52 изъ 53... 1; пишемъ 1 подъ цыфрою 3, 5 запоминаемъ. Восемью 5... 40, да 5... 45; 45 изъ 48... 3; пишемъ 3 подъ цыфрою 8. 1-й остатокъ есть 3118; сносимъ къ нему слѣдующую цыфру дѣлимаго 7. Продолжаемъ дѣленіе такъ далѣе.

Подобное вычитаніе основывается на томъ, что остатокъ не измѣнится, если уменьшаемое и вычитаемое увеличимъ на одно и то же число. Каждый разъ къ уменьшаемому прибавляютъ столько единицъ слѣдующаго высшаго разряда, сколько нужно для того, чтобы можно было вычесть произведеніе цыфры дѣлителя на цыфру частнаго.

76. Случай, когда дѣлитель оканчивается нулями. Дѣленіе упрощается въ томъ случаѣ, когда дѣлитель оканчивается нулемъ или нѣсколькими нулями. Возьмемъ сначала случай, когда дѣлитель есть единица съ нулями. Раздѣлить какое-нибудь число на 10, на 100, на 1000 и т. д., значитъ, между прочимъ, узнать, сколько въ этомъ числѣ заключается десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д. Но это легко узнается по правилу нумераціи, указанному нами ранѣе (§ 14). Напр.:

54634 : 10=5463 (ост. 4)

54634 : 1000=54 (ост. 634)

Правило. **Чтобы раздѣлить число на 1 съ нулями,**

отдѣляютъ въ дѣлимомъ справа столько цыфръ, сколько есть нулей въ дѣлителѣ; тогда оставшіяся цыфры дѣлимаго представятъ собою частное, а отдѣленныя—остатокъ.

Возьмемъ теперь случай, когда дѣлитель есть какое-нибудь число, оканчивающееся нулями; напр.:

```
389224 | 7300
365|||  -----
----||   53
 242||
 219||
-------
  2324
```

Дѣлитель представляетъ собою 73 сотни. Чтобы узнать, сколько разъ 73 сотни содержатся въ дѣлимомъ, разобьемъ его на двѣ части: на сотни и единицы. Первая часть есть 3892 сотни, вторая часть—24 единицы. 73 сотни могутъ содержаться только въ одной изъ этихъ частей, именно въ сотняхъ. Чтобъ узнать, сколько разъ 73 сотни содержатся въ 3892 сотняхъ, надо 3892 раздѣлить на 73. Раздѣливъ, находимъ, что 73 сотни въ 3892 сотняхъ содержатся 53 раза, причемъ 23 сотни остаются. Приложивъ къ 23 сотнямъ 24 единицы дѣлимаго, получимъ 2324; въ этомъ числѣ 73 сотни не содержатся ни разу; слѣд., 2324 единицы будутъ въ остаткѣ.

Вотъ еще примѣръ, въ которомъ и дѣлимое, и дѣлитель оканчиваются нулями:

```
35000 | 7300
292||  -----
-----    4
 5800
```

Правило. Если дѣлитель оканчивается нулями, то зачеркиваютъ въ немъ эти нули и въ дѣлимомъ зачеркиваютъ справа столько же цыфръ; оставшіяся числа дѣлятъ и къ остатку сносятъ зачеркнутыя цыфры дѣлимаго.

77. Повѣрка дѣленія. Дѣленіе можно повѣрять умноженіемъ, основываясь на томъ, что дѣлимое равно

дѣлителю, умноженному на частное (плюсъ остатокъ если онъ есть). Напр.:

Дѣленіе:		Повѣрка:	
8375	42		199
42	199		× 42
417			398
378			796
395			8358
378			+ 17
17			8375

Мы умножили частное 199 на дѣлителя 42 и къ полученному произведенію приложили остатокъ 17. Такъ какъ послѣ этого получилось число, равное дѣлимому, то весьма вѣроятно, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

78. Какъ раздѣлить на произведеніе. Пусть требуется раздѣлить 60 на произведеніе 5 . 3, т.-е. на 15. Разъяснимъ, что для этого достаточно раздѣлить 60 на 5 и полученное частное раздѣлить еще на 3:

$$60 : 5 = 12; \qquad 12 : 3 = 4.$$

Дѣйствительно, первымъ дѣленіемъ мы, можно сказать, разлагаемъ 60 на 5 равныхъ частей, при чемъ въ каждой части получается 12; вторымъ дѣленіемъ мы разлагаемъ 12 на три равныя части, причемъ въ каждой части получается по 4. Это можно наглядно изобразить такъ:

$$\overbrace{\overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12} + \overbrace{4+4+4}^{12}}^{60}$$

Отсюда видно, что послѣ двухъ этихъ дѣленій число 60 оказывается разложеннымъ на 15 равныхъ частей.

Подобнымъ образомъ можемъ разъяснить, что для дѣленія числа 300 на произведеніе трехъ множителей 3 . 5 . 4, можно раздѣлить 300 на 3 (получимъ 100), затѣмъ это

частное раздѣлить на 5 (получимъ 20) и, наконецъ, послѣднее частное раздѣлить на 4 (получимъ 5).

Правило. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно раздѣлить это число на перваго сомножителя, полученное частное раздѣлить на второго сомножителя, это частное—на третьяго и т. д. (предполагается при этомъ, что каждое дѣленіе выполняется безъ остатка).

Этимъ правиломъ можно иногда пользоваться при **устномъ дѣленіи**; напр., чтобы раздѣлить 1840 на 20, мы принимаемъ во вниманіе, что 20=10 . 2 и дѣлимъ 1840 на 10 (получимъ 184) и найденное число на 2 (получимъ 92); подобно этому, чтобы раздѣлить какое-нибудь число на 8, т.-е. на произведеніе, равное 2 . 2 . 2, можно дѣлимое раздѣлить на 2, потомъ еще на 2 и еще на 2.

IX. Измѣненіе произведенія и частнаго.

79. Измѣненіе произведенія при измѣненіи одного изъ данныхъ чиселъ. Разсмотримъ слѣдующіе 4 случая измѣненія произведенія.

1) **Если увеличимъ (или уменьшимъ) множителя въ нѣсколько разъ, то произведеніе увеличится (или уменьшится) во столько же разъ.**

Такъ, если въ примѣрѣ 15×3 мы увеличимъ множителя въ 2 раза:

$$15\times3 \qquad 15\times6,$$

то и само произведеніе увеличится въ 2 раза, такъ какъ умноженіе 15 на 3 представляетъ собою нахожденіе суммы трехъ слагаемыхъ: 15+15+15, тогда какъ умноженіе 15-и на 6 есть нахожденіе суммы 6 такихъ же слагаемыхъ:

15+15+15+15+15+15, а эта сумма больше первой въ два раза.

2) **Если увеличимъ (или уменьшимъ) множимое въ нѣсколько разъ, то произведеніе увеличится (или уменьшится) во столько же разъ.**

Такъ, если въ примѣрѣ 15×3 мы увеличимъ множимое въ 4 раза, т.-е. возьмемъ 60×3, то и произведеніе увеличится въ 4 раза; дѣйствительно, первое произведеніе представляетъ собою сумму трехъ слагаемыхъ: 15+15+15, и второе произведеніе представляетъ собою также сумму трехъ слагаемыхъ: 60+60+60, но каждое слагаемое второй суммы въ 4 раза болѣе каждаго слагаемаго первой суммы; значитъ, вторая сумма въ 4 раза больше первой суммы.

3) **Если одного изъ сомножителей увеличимъ (или уменьшимъ) на какое-нибудь число, то произведеніе увеличится (или уменьшится) на это число, умноженное на другого сомножителя.**

Такъ, если въ примѣрѣ 8×3=24 увеличимъ множителя на 2, т.-е. 8 будемъ умножать не на 3, а на 5, то тогда 8 повторится слагаемымъ не 3 раза, а 5 разъ; значитъ, произведеніе будетъ больше прежняго на 8+8, т.-е. на 8 . 2, или на 16 (оно равно теперь 40).

Если въ томъ же примѣрѣ увеличимъ множимое, положимъ, на 5, т.-е. будемъ умножать не 8 на 3, а 13 на 3, то въ произведеніе взойдутъ теперь 5 новыхъ единицъ, повторенныя 3 раза; значитъ, произведеніе увеличится противъ прежняго на 5 . 3, т.-е. на 15 (оно равно теперь 39) *).

*) Указанныя измѣненія составляютъ слѣдствія сочетательнаго и распредѣлительнаго свойствъ произведенія (§ 61,*a*). Дѣйствительно, изъ перваго свойства слѣдуетъ, что

$$(aq)b=(ab)q \quad \text{и} \quad a(bq)=(ab)q.$$

Значитъ, если увеличимъ одного изъ сомножителей въ q разъ, то и произведеніе увеличится въ q разъ.

Изъ распредѣлительнаго свойства слѣдуетъ что

$$(a+q)b=ab+qb \quad \text{и} \quad a(b+q)=ab+aq.$$

Значитъ, если увеличимъ одного изъ сомножителей на число q, то произведеніе увеличится на это число, умноженное на другого сомножителя.

80. Упрощеніе умноженія въ нѣкоторыхъ случаяхъ. Зная эти измѣненія произведенія, мы можемъ иногда упростить умноженіе. Пусть, напр., надо умножить 438 на 5. Умноживъ 438 на 10, получимъ 4380; такъ какъ 5 меньше 10 въ 2 раза, то произведеніе 438×5 должно быть вдвое меньше 4380, т.-е. оно равно 2190.

Подобно этому, если требуется умножить какое-нибудь число, напр. 32, на 25, мы можемъ умножить это число на 100 (получимъ 3200) и полученное произведеніе уменьшить въ 4 раза (получимъ 800).

Пусть еще требуется умножить 523 на 999. Дополнимъ множителя до 1000, т.-е. увеличимъ его на 1. Тогда получимъ произведеніе 523. 1000, которое находится сразу: 523000. Это число болѣе искомаго на 523; значитъ, искомое произведеніе получится, если изъ 523000 вычтемъ 523 (получимъ 522477).

81. Измѣненіе произведенія при измѣненіи обоихъ данныхъ чиселъ. Если оба сомножителя измѣняются одновременно, то произведеніе иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ перемѣны. Чтобы опредѣлить заранѣе, что сдѣлается съ произведеніемъ отъ одновременнаго измѣненія обоихъ сомножителей, слѣдуетъ предположить, что сначала измѣнено только одно множимое, а потомъ и множитель. Разъяснимъ это на примѣрѣ: 15×6=90.

1) Увеличимъ множимое въ 3 раза и множителя въ 2 раза:

$$15\times6=90;\quad 45\times12=?$$

Отъ увеличенія одного множимаго въ 3 раза произведеніе увеличится въ 3 раза, т.-е. будетъ не 90, а 90+90+90. Отъ увеличенія затѣмъ множителя въ 2 раза произведеніе еще увеличится въ 2 раза; значитъ, оно теперь будетъ:

$$(90+90+90)+(90+90+90),$$

т.-е. сравнительно съ начальнымъ произведеніемъ оно увеличится въ дважды три раза (въ 6 разъ).

2) еньшимъ множимое въ 3 раза и множителя въ 2 раза:

$$15 \times 6 = 90; \quad 5 \times 3 = ?$$

Отъ уменьшенія одного множимаго въ 3 раза произведеніе уменьшится въ 3 раза, т.-е. вмѣсто 90 сдѣлается 30; отъ уменьшенія затѣмъ множителя въ 2 раза произведеніе еще уменьшится въ 2 раза, т.-е. сдѣлается вмѣсто 30-и 15. Значитъ отъ этихъ двухъ измѣненій произведеніе уменьшится въ дважды три раза, т.-е. въ 6 разъ.

3) Увеличимъ множимое въ 6 разъ, а множителя уменьшимъ въ 2 раза:

$$15 \times 6 = 90; \quad 90 \times 3 = ?$$

Отъ увеличенія одного множимаго въ 6 разъ произведеніе увеличится въ 6 разъ, а отъ уменьшенія затѣмъ множителя въ 2 раза это увеличенное въ 6 разъ произведеніе уменьшится въ 2 раза. Значитъ, послѣ двухъ этихъ измѣненій произведеніе увеличится только въ 3 раза (въ 6 : 2 раза).

4) Если одинъ сомножитель увеличится, а другой уменьшится въ одинаковое число разъ, то произведеніе не измѣнится, потому что отъ увеличенія одного сомножителя произведеніе увеличится, а отъ уменьшенія другого сомножителя оно уменьшится во столько же разъ. Напр.:

$$15 \times 6 = 90; \; 30 \times 3 = 90; \; 5 \times 18 = 90.$$

82. Измѣненіе частнаго при измѣненіи одного изъ данныхъ чиселъ. Когда дѣленіе совершается безъ остатка, то при измѣненіи дѣлимаго и дѣлителя частное измѣняется слѣдующимъ образомъ:

1) **Если увеличимъ (или уменьшимъ) дѣлимое въ нѣсколько разъ, то частное увеличится (или уменьшится) во столько же разъ,** потому что, увеличивая дѣлимое и оставляя дѣлителя безъ перемѣны, мы увеличиваемъ произведеніе и оставляемъ одного сомножителя безъ перемѣны; а это

возможно только тогда, когда другой сомножитель (т. е. частное) увеличится во столько же разъ. Напр.:

10 : 2=5;   20 : 2=10;   30 : 2=15 и т. п.

2) **Если увеличимъ (или уменьшимъ) дѣлителя въ нѣсколько разъ, то частное уменьшится (или увеличится) во столько же разъ**, потому что, когда увеличенъ одинъ сомножитель (дѣлитель), произведеніе (дѣлимое) останется безъ перемѣны только тогда, когда другой сомножитель (частное) уменьшится во столько же разъ. Напр.:

48 : 2=24;   48 : 4=12;   48 : 6=8 и т. п.

Замѣчаніе. Когда при дѣленіи получается остатокъ, то эти выводы не всегда бываютъ вѣрны. Напр.:

29 : 6=4 (ост. 5)   29 : 3=9 (ост. 2).

83. Измѣненіе частнаго при измѣненіи обоихъ данныхъ чиселъ. Когда дѣлимое и дѣлитель измѣняются одновременно, то частное иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ измѣненія. Такъ, если въ примѣрѣ 27 : 3=9 увеличимъ дѣлимое въ 2 раза и дѣлителя увеличимъ въ 6 разъ, то частное уменьшится въ 3 раза: 54 : 18=3.

Слѣдуетъ обратить особенное вниманіе на тѣ случаи, когда частное остается безъ измѣненія:

Если дѣлимое и дѣлителя увеличимъ (или уменьшимъ) въ одинаковое число разъ, то частное не измѣнится, потому что отъ увеличенія (или уменьшенія) дѣлимаго частное увеличивается (или уменьшается), а отъ увеличенія (или уменьшенія) дѣлителя оно уменьшается (или увеличивается) въ одинаковое число разъ.

Такъ, если въ примѣрѣ 60 : 15=4 увеличимъ дѣлимое и дѣлителя въ 5 разъ, то получимъ: 300 : 75=4; если въ томъ же примѣрѣ уменьшимъ дѣлимое и дѣлителя въ 5 разъ, то получимъ 12 : 3=4.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Именованныя цѣлыя числа.

I. Понятіе объ измѣреніи величинъ.

84. Понятіе о величинѣ. Все то, что можетъ быть равно, больше или меньше, наз. **величиною.** Такъ вѣсъ предметовъ есть величина, потому что вѣсъ одного предмета можетъ быть равенъ вѣсу другого предмета и можетъ быть больше или меньше вѣса другого предмета.

Вотъ величины, наиболѣе знакомыя каждому изъ насъ:

длина (называемая иногда шириною, иногда высотою, толщиною...);

поверхность, т.-е. то, что ограничиваетъ предметъ съ разныхъ сторонъ;

объемъ, т.-е. часть пространства, занимаемая предметомъ;

вѣсъ, т.-е. давленіе, производимое предметомъ на горизонтальную подпору;

время, въ теченіе котораго совершается какое-либо явленіе или дѣйствіе;

цѣна товара и многія другія величины.

Замѣтимъ, что плоская поверхность какого-нибудь предмета (напр., поверхность стола, пола и т. п.) называется обыкновенно **площадью;** внутренній объемъ какого-либо сосуда или ящика наз. **вмѣстимостью** или **емкостью.**

85. Значеніе величины. Каждая величина можетъ имѣть множество **значеній,** отличающихся одно отъ другого только тѣмъ, что одно значеніе больше,

другое—меньше. Напр., величина, называемая длиной, въ разныхъ предметахъ вообще имѣетъ различныя значенія; такъ, у листа бумаги длина иная, чѣмъ у комнаты, у линейки и пр. Иногда можетъ случиться, что у двухъ предметовъ длина окажется совершенно одинаковой; тогда говорятъ, что у этихъ предметовъ длина имѣетъ одно и то же значеніе.

86. Измѣреніе величины. Положимъ, что мы хотимъ составить себѣ ясное понятіе о длинѣ какой-нибудь комнаты; тогда мы измѣряемъ ее при помощи другой длины, которая намъ хорошо извѣстна, напр., при помощи аршина. Для этого откладываемъ аршинъ по длинѣ нашей комнаты столько разъ, сколько можно. Если аршинъ уложится по длинѣ комнаты ровно 10 разъ, то длина ея равна 10 аршинамъ. Подобно этому, чтобы измѣрить вѣсъ какого-либо предмета, мы беремъ другой вѣсъ, который намъ хорошо извѣстенъ, напр., фунтъ, и узнаемъ (помощью вѣсовъ), сколько разъ фунтъ содержится въ измѣряемомъ значеніи вѣса. Пусть онъ содержится ровно 5 разъ; тогда вѣсъ предмета равенъ 5 фунтамъ.

Извѣстное намъ значеніе величины, употребляемое для измѣренія другихъ значеній той же величины, наз. **единицею** этой величины. Такъ, аршинъ есть единица длины, фунтъ—единица вѣса, и т. п.

Для каждой величины обыкновенно выбираютъ нѣсколько единицъ, однѣ болѣе крупныя, другія болѣе мелкія. Такъ, для измѣренія длины, кромѣ аршина, употребляютъ еще: сажень, версту, вершокъ, футъ и другія. Если, напр., въ длинѣ комнаты аршинъ содержится не ровно 10 разъ, а съ нѣкоторымъ остаткомъ, который меньше аршина, то этотъ остатокъ измѣряютъ при помощи болѣе мелкой единицы, напр. вершкомъ. Если случится, что въ остаткѣ вершокъ уложится 7 разъ, то длина комнаты равна 10 аршинамъ 7 вершкамъ.

Вообще, **измѣрить какое-либо значенiе величины значитъ выразить его при помощи одной или нѣсколькихъ единицъ этой величины.**

87. Мѣры. Въ каждомъ государствѣ правительство установило опредѣленныя единицы для главнѣйшихъ величинъ. Сдѣланы образцовыя единицы: образцовый аршинъ, образцовый фунтъ и т. п., по которымъ приготовляютъ единицы для обиходнаго употребленiя. Единицы, вошедшiя въ употребленiе, называются **мѣрами.**

По сравненiю одна съ другой **однородныя мѣры** (т.-е. мѣры одной и той же величины), бываютъ **высшаго и низшаго разрядовъ.** Такъ, сажень есть мѣра высшаго разряда по сравненiю съ аршиномъ и низшаго разряда по сравненiю съ верстой.

Единичнымъ отношенiемъ (или просто **отношенiемъ**) двухъ однородныхъ мѣръ называется число, показывающее, сколько разъ меньшая мѣра содержится въ бóльшей. Такъ, отношенiе сажени къ аршину есть число 3.

Разсмотримъ главнѣйшiя мѣры, употребляемыя у насъ, въ Россiи.

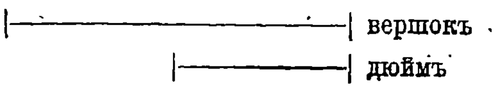
88. Мѣры длины (или разстоянiй). Мѣры длины (называемыя иначе **линейными** мѣрами, потому что онѣ служатъ для измѣренiя длины линiй) слѣдующiя:

миля = 7 верстамъ,
верста =500 саженямъ,
сажень = 3 аршинамъ,
аршинъ= 16 вершкамъ,
сажень = 7 футамъ,
футъ = 12 дюймамъ,
дюймъ = 10 линiямъ.

Такъ какъ аршинъ втрое меньше сажени, а сажень содержитъ 84 дюйма (12×7), то

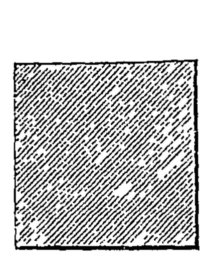
1 арш.=28 дюймамъ.

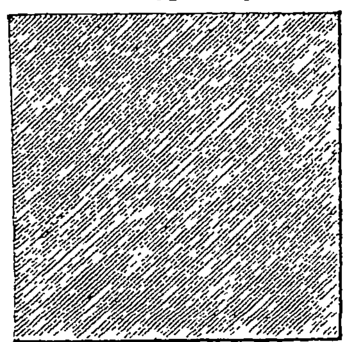
Прилагаемъ здѣсь для нагляднаго сравненiя двѣ мѣры:

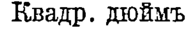


89. Мѣры площадей. Для измѣренія площадей употребляются мѣры, называемыя **квадратными**, такъ какъ онѣ имѣютъ форму квадрата. Квадратомъ называется такой четыреугольникъ, у котораго всѣ 4 стороны равны и всѣ 4 угла одинаковы. Квадратный дюймъ есть квадратъ, у котораго каждая сторона равна линейному дюйму; квадратный вершокъ есть квадратъ, у котораго каждая сторона равна линейному вершку, и т. д.

Для наглядности квадр. дюймъ и квадр. вершокъ изображены у насъ на чертежѣ въ натуральную величину:







Квадр. дюймъ Квадр. вершокъ

Отношеніе двухъ квадр. мѣръ какихъ-либо названій равно отношенію двухъ линейныхъ мѣръ тѣхъ же названій, помноженному само на себя. Такъ, отношеніе квадр. сажени къ квадр. аршину равно произведенію 3×3, т.е. числу 9. Для объясненія этого вообразимъ два квадрата такихъ, чтобы у одного сторона была въ аршинъ, а у другого — въ сажень; тогда меньшій квадратъ будетъ квадратный аршинъ, а бóльшій—квадратная сажень (эти два квадрата въ уменьшенномъ видѣ изображены у насъ на чертежѣ). Если раз-

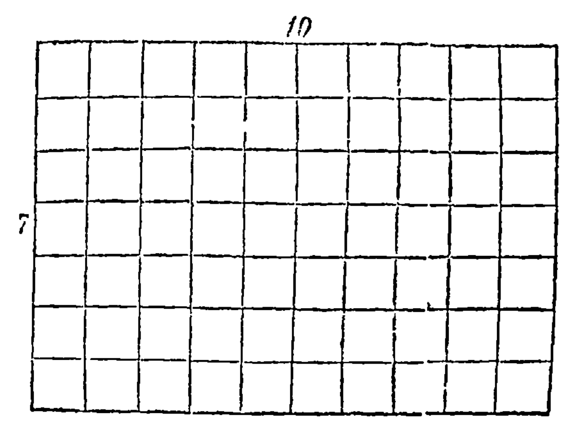
дѣлимъ большій квадратъ на 3 равныя полосы, то каждая полоса, имѣя ширину 1 арш., а длину въ 3 аршина, будетъ содержать, очевидно, 3 малыхъ квадрата; значитъ, большій квадратъ будетъ содержать ихъ 3 раза по 3 или 9.

Такимъ образомъ составляется слѣдующая

таблица квадр. мѣръ:

квадр. миля=49 кв. верст. (7×7=49)
» верста=250000 кв. саж. (500×500=250000)
» сажень=9 кв. арш. (3×3=9)
» сажень=49 кв. фут. (7×7=49)
» аршинъ=256 кв. вершк. (16×16=256)
» футъ=144 кв. дюйма (12×12=144)
» дюймъ=100 кв. линій (10×10=100)

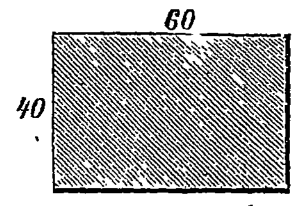
90. Измѣреніе нѣкоторыхъ площадей. Если площадь имѣетъ форму четыреугольника съ одинаковыми углами (форму п р я м о у г о л ь н и к а), то ее легко измѣрить. Пусть, напр., требуется узнать, сколько квадратныхъ аршинъ заключается въ площади пола комнаты.

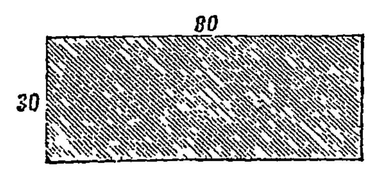


Для этого достаточно смѣрить линейнымъ аршиномъ длину и ширину комнаты и полученныя числа перемножить. Пусть., напр., длина комнаты равна 10 аршинамъ, а ширина—7 аршинамъ. Раздѣлимъ длину пола на 10, а ширину

на 7 равныхъ частей, а затѣмъ проведемъ линіи, какъ указано на чертежѣ; тогда площадь пола раздѣлится на кв аршины, которыхъ будетъ 7 рядовъ по 10, т.-е. 10×7=70.

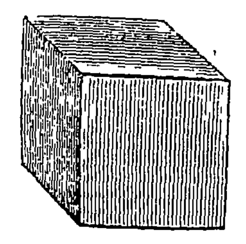
91. Десятина. Для измѣренія поверхности полей употребляется десятина; это—площадь, содержащая въ





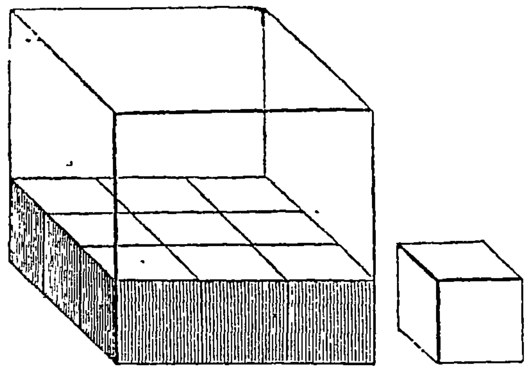
себѣ 2400 кв. саженъ, и равная, слѣд., площади прямоугольника, имѣющаго въ длину 60 саж., а въ ширину 40 саж., или въ длину 80 саж., а въ ширину 30 саж. (умноживъ 60 на 40 или 80 на 30, получимъ одно и то же число 2400).

92. Мѣры объемовъ. Для измѣренія объемовъ употребляются мѣры, называемыя **кубическими**, такъ какъ онѣ имѣютъ форму куба. Кубомъ наз. объемъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ 6-ью одинаковыми квадратами. Каждый квадратъ называется стороною куба; линіи, по которымъ пересѣкаются двѣ смежныя стороны, называются ребрами куба. Всѣ ребра куба имѣютъ одинаковую длину. Кубъ, у котораго каждое ребро въ дюймъ, называется кубическимъ дюймомъ; кубическимъ футомъ назыв. такой кубъ, у котораго каждое ребро равно линейному футу, и т. п.



Отношеніе двухъ кубическихъ мѣръ какихъ-либо названій равно отношенію двухъ линейныхъ мѣръ тѣхъ же названій, взятому сомножителемъ 3 раза. Такъ, отношеніе куб. сажени къ куб. аршину равно произведенію 3 . 3 . 3, т.-е. числу 27. Для объясненія этого представимъ себѣ такіе 2 куба, чтобы у одного ребро было въ аршинъ, а у

другого—въ сажень; тогда меньшій кубъ будетъ куб. аршинъ, а больщій—куб. сажень (такіе два куба мы изобразили на чертежѣ въ уменьшенномъ видѣ). Очевидно,



что на днѣ большаго куба установится 9 меньшихъ кубовъ (потому что дно большаго куба содержитъ въ себѣ 9 квадр. аршинъ). Но высота большаго куба равна сажени, а высота меньшаго куба равна аршину; поэтому на первый слой малыхъ кубовъ можно будетъ еще положить 2 слоя, и тогда выйдетъ 3 слоя по 9 кубовъ; значитъ, всего кубическихъ аршинъ въ кубической сажени 3 . 3 . 3, т.-е. 27.

Такимъ образомъ составляется слѣдующая

таблица кубическихъ мѣръ:

куб. миля=343 куб. верст. (7×7×7)
» верста=125000000 куб. саж. (500×500×500)
» сажень=27 куб. арш. (3×3×3)
» сажень=343 куб. футамъ (7×7×7)
» аршинъ=4096 куб. вершк. (16×16×16)
» футъ=1728 куб. дюйм. (12×12×12)
» дюймъ=1000 куб. линіямъ (10×10×10)

Для измѣренія объемовъ жидкихъ тѣлъ, какъ основная мѣра, употребляется—ведро, имѣющее объемъ, равный приблизительно 750 куб. дюймамъ; въ этомъ объемѣ помѣщается 30 фунтовъ чистой воды *).

*) При температурѣ $16^2/_3{}^\circ$ Цельсія.

Кромѣ того употребительны:

бочка=40 вед., ведро=10 штофамъ, штофъ=2 полуштофамъ, полуштофъ=5 чаркамъ.

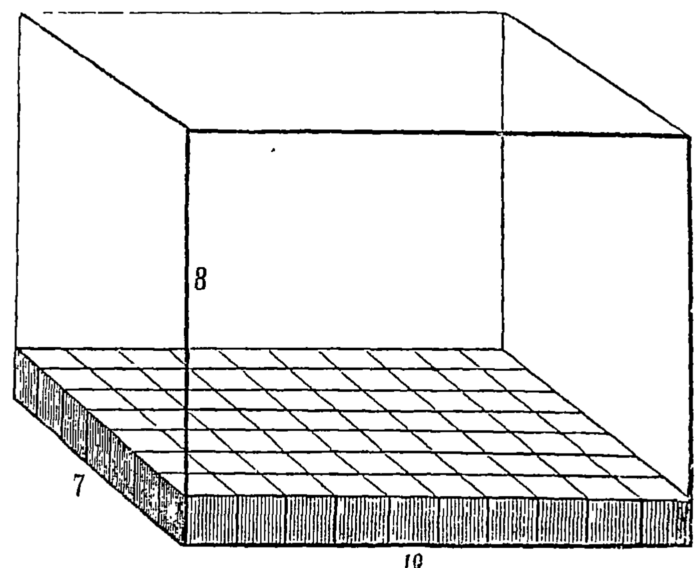
Для измѣренія объемовъ сыпучихъ тѣлъ (ржи, пшеницы, овса и т. п.) употребительны:

Четверть=2 осьминамъ=8 четверикамъ (или мѣрамъ), четверикъ=8 гарнцамъ.

Гарнецъ вмѣщаетъ въ себѣ 8 фунтовъ чистой воды; четверикъ есть сосудъ, котораго вмѣстимость немного менѣе куб. фута (1601 куб. дюймъ).

Замѣтимъ, что слова «четверикъ» и «четверть» обыкновенно пишутъ сокращенно такъ: «чк.» и «чт.».

93. Измѣреніе нѣкоторыхъ объемовъ. Если объемъ представляетъ собою форму, ограниченную 6-ю прямоугольниками*), то его легко измѣрить. Пусть,



напр., требуется узнать, сколько куб. аршинъ заключается въ объемѣ комнаты. Для этого достаточно измѣрить линейнымъ аршиномъ длину, ширину и высоту ком-

*) Форму прямоугольнаго параллелепипеда.

наты и полученныя числа перемножить. Пусть, напр., длина комнаты будетъ 10 аршинъ, ширина—7 арш., а высота—8 арш. Умноживъ 10 на 7, мы узнаемъ, что на полу комнаты помѣстится 70 квадр. аршинъ. Очевидно, что на каждомъ изъ этихъ 70 квадр. аршинъ можно поставить одинъ куб. аршинъ, а на всемъ полу ихъ установится 70. Тогда получится слой кубовъ въ одинъ аршинъ высоты (какъ изображено у насъ на чертежѣ). Такъ какъ комната имѣетъ въ высоту 8 арш., то въ ней можно помѣстить одинъ на другой 8 слоевъ. Тогда всѣхъ куб. аршинъ окажется 70×8, т.-е. 560, или произведеніе трехъ чиселъ: 10×7×8.

Такъ же можно узнать объемъ ящика, стѣны, ямы съ отвѣсными стѣнками и съ прямоугольнымъ основаніемъ и т. п.

94. Мѣры торговаго вѣса.

Пудъ=40 фунтамъ.	Лотъ=3 золотникамъ.
Фунтъ=32 лотамъ=96 золот.	Золотникъ=96 долямъ.

Замѣтимъ, что фунтъ есть вѣсъ 25 куб. дюймовъ чистой воды, а пудъ—вѣсъ 1000 куб. дюймовъ чистой воды.

Мѣры аптекарскаго вѣса. Аптекарскій фунтъ меньше торговаго фунта на одну восьмую часть; онъ равенъ 28 лотамъ или 84 золотн. торговаго вѣса.

Ап. фунтъ=12 унціямъ.	Драхма=3 скрупуламъ.
Унція=8 драхмамъ.	Скрупулъ=20 гранамъ *).

95. Мѣры цѣны (деньги). Какъ мѣры цѣны употребляются или металлическія монеты, или кредитные билеты.

Металлическія монеты употребительны золотыя, серебряныя и мѣдныя.

Золотая монета чеканится изъ сплава, содержащаго на 9 вѣсовыхъ частей золота 1 вѣсовую часть мѣди. Въ настоящее время чеканятся золотыя монеты въ 10 руб. и въ 5 руб.; имѣются еще въ обращеніи золотыя монеты преж-

*) Въ настоящее время въ аптекахъ примѣняется также и метрическая система вѣса; см. объ этомъ выноску въ концѣ § 200.

няго чекана въ 15 руб. (имперіалъ), и въ 7 руб. 50 коп. (полуимперіалъ).

Серебряная монета въ 1 рубль, въ 50 коп. и въ 25 коп. чеканится изъ сплава, содержащаго на 9 вѣсовыхъ частей серебра 1 вѣсовую часть мѣди, а серебряная монета въ 20 коп., 15 коп., 10 коп. и 5 коп. чеканится изъ сплава, содержащаго на 5 вѣсовыхъ частей серебра 5 частей мѣди.

Мѣдная монета чеканится: въ 5 коп., 3 коп. 2 коп., 1 коп., въ полкопейки и въ четверть копейки.

Кредитные билеты употребляются: въ 500 руб., 100 руб., 50 руб., 25 руб., 10 руб., 5 руб., 3 руб. и 1 руб.*).

Мѣры бумаги. Стопа=20 дестямъ, десть=24 листамъ.

96. Мѣры времени. Есть двѣ основныя мѣры времени: сутки и годъ. **Сутки** представляютъ (приблизительно) то время, въ теченіе котораго земля совершаетъ полный оборотъ около своей оси; онѣ раздѣляются на 24 часа, считаемые отъ 1 до 12 и затѣмъ опять отъ 1 до 12. За начало сутокъ принимаютъ полночь, т.-е. 12 часовъ ночи.

Недѣля=7 суткамъ.	Часъ=60 минутамъ.
Сутки=24 часамъ.	Минута=60 секундамъ.

Годъ представляетъ собою (приблизительно) то время, въ теченіе котораго земля совершаетъ полный оборотъ кругомъ солнца. У насъ принято считать каждые 3 года въ 365 дней, а четвертый—въ 366 дней. Годъ, содержащій въ себѣ 366 дней, называется **високоснымъ**, а года, содержащіе по 365 дней,—**простыми**. Къ четвертому году добавляютъ одинъ лишній день по слѣдующей причинѣ. Время обращенія земли вокругъ солнца содержитъ въ себѣ не ровно 365 сутокъ, а 365 сутокъ и 6 часовъ (приблизительно). Такимъ образомъ, простой годъ короче истиннаго года на 6 часовъ, а 4 простыхъ года короче 4-хъ истин-

*) Временно въ 1915 г. введены бумажныя деньги въ 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20 и 50 копѣекъ.

ныхъ годовъ на 24 часа, т.-е. на однѣ сутки. Поэтому къ каждому четвертому году добавляютъ однѣ сутки (29-е февраля). Случилось такъ, что годъ, отъ котораго мы ведемъ наше лѣтосчисленіе (т.-е. годъ Рождества Христова), былъ високосный; поэтому слѣдующіе затѣмъ високосные годы были: 4-й, 8-й, 16-й, 20-й... вообще такіе годы, которыхъ числа дѣлятся на 4 безъ остатка; такъ, 1912-й годъ былъ високосный (1912 дѣлится на 4 безъ остатка), года же 1913, 1914, 1915 были простые.

Годъ раздѣляется на 12 неравныхъ частей, называемыхъ **мѣсяцами**. Вотъ названія мѣсяцевъ по порядку: январь (31 день), февраль (28 или 29), мартъ (31), апрѣль (30), май (31), іюнь (30), іюль (31), августъ (31), сентябрь (30), октябрь (31), ноябрь (30), и декабрь (31).

Лѣтосчисленіе, по которому три года считаются въ 365 дней, а четвертый въ 366 было установлено римскимъ диктаторомъ Юліемъ Цезаремъ (въ 46 году до Р. Х.) и потому наз. **юліанскимъ**. Оно принято у насъ въ Россіи. Въ западной Европѣ считаютъ нѣсколько иначе, а именно тамъ счетъ идетъ на 13 дней впереди нашего; такъ, когда мы считаемъ 1-е января, тамъ считаютъ 14-е января.

97.* Григоріанское лѣтосчисленіе. Время, протекающее отъ одного весенняго равноденствія до слѣдующаго весенняго равноденствія, называется *солнечнымъ* или *тропическимъ годомъ*; время, считаемое за годъ по гражданскому лѣтосчисленію, называется *гражданскимъ годомъ*.

Такъ какъ перемѣны временъ года зависятъ отъ положенія земли относительно солнца, то солнечный годъ представляетъ такой промежутокъ времени, въ теченіе котораго вполнѣ завершаются перемѣны временъ года. Поэтому желательно, чтобы годъ гражданскій по возможности совпадалъ съ годомъ солнечнымъ; только при этомъ условіи времена года будутъ приходиться въ одни и тѣ же мѣсяцы. Лѣтосчисленіе, введенное Юліемъ Цезаремъ, достигаетъ этого не вполнѣ. По этому счисленію гражданскій годъ считается въ 365 дней и

6 часовъ, тогда какъ солнечный годъ содержитъ (приблизительно) 365 дней 5 часовъ 48 мин. 48 сек., такъ что годъ юліанскаго счисленія длиннѣе солнечнаго (приблизительно) на 11 мин. 12 сек., что въ 400 лѣтъ составляетъ почти 3 дня. Юліанское лѣтосчисленіе исправлено было впервые папою Григоріемъ XIII-мъ въ 1582 году. Къ этому году разница между гражданскимъ счисленіемъ времени и солнечнымъ составляла 10 сутокъ, такъ что считали, напр., 1-е сентября, когда слѣдовало бы по солнечному времени считать 11-е сентября. Чтобы уравнять гражданское время съ солнечнымъ, Григорій XIII повелѣлъ вмѣсто 5 октября въ 1582 г. считать 15-е октября. Но такъ какъ подобное запаздываніе должно было повториться и впослѣдствіи, то Григорій XIII установилъ, чтобы на будущее время каждыя 400 лѣтъ гражданскаго счисленія были сокращены на 3-е сутокъ. Это сокращеніе должно было производиться такимъ образомъ. По юліанскому счисленію тѣ годы, которыхъ числа представляютъ полныя сотни, считаются високосными; напр., годы 1600-й, 1700-й и т. п. должны считаться по юліанскому счисленію въ 366 дней. Но Григорій XIII повелѣлъ, чтобы такіе годы считались простыми, кромѣ тѣхъ, у которыхъ число сотенъ дѣлится на 4. Вслѣдствіе этого, по счисленію папы Григорія, годъ 1600-й долженъ былъ считаться високоснымъ (16 дѣлится на 4), а годы: 1700, 1800, 1900—простыми, тогда какъ по юліанскому счисленію всѣ эти 4 года считались високосными. Такимъ образомъ, каждыя 400 лѣтъ сокращаются на 3-е сутокъ. Счисленіе, установленное Григоріемъ XIII, извѣстно подъ именемъ григоріанскаго. Оно въ настоящее время принято по всей Европѣ, кромѣ Россіи и Греціи. Григоріанское счисленіе называется иначе новымъ стилемъ, а юліанское—старымъ стилемъ. Такъ какъ въ 1582 году новый стиль подвинулся впередъ отъ стараго стиля на 10 дней, а послѣ того еще на 3 дня (въ 1700,1800 и 1900 годахъ), то въ настоящее время старый стиль отстаетъ отъ новаго на 13 дней.

98. Именованное число. То, что получается послѣ измѣренія величины (результатъ измѣренія), назы-

вают **числомъ.** Число наз. **именованнымъ,** если при немъ оставлено названіе единицы измѣренія, напр., 7 саженъ. Число наз. **отвлеченнымъ,** если при немъ не поставлено названія единицы, которою производилось измѣреніе; таково, напр., число 7.

Именованное число наз. **простымъ,** если оно составлено изъ единицъ только одного названія, напр., 13 фунтовъ. Именованное число называется **составнымъ,** если оно составлено изъ единицъ разныхъ названій, напр.:

13 фунтовъ 5 лотовъ 2 золотника.

Замѣтимъ, что, если составное именованное число составлено правильно, то всякое отдѣльное число въ немъ не должно составлять ни одной единицы слѣдующаго высшаго разряда; напр., такое число:

2 пуда 85 фунтовъ

неправильно составлено, потому что 85 фунтовъ больше 40 фунтовъ и, значитъ, 85 фунтовъ содержатъ въ себѣ нѣсколько пудовъ (именно 2 пуда 5 фунт.). Правильно составленное число будетъ 4 пуда 5 фунт.

99*. Двойное опредѣленіе числа. Въ началѣ этого учебника число было опредѣлено, какъ **собраніе единицъ** (§ 1). Теперь числу дано другое опредѣленіе, а именно: число есть **результатъ измѣренія.** Это второе опредѣленіе даетъ числу болѣе широкое значеніе, чѣмъ первое; оно обнимаетъ собою и числа цѣлыя, и числа дробныя.

II. Преобразованіе именованнаго числа.

100. Равенство и неравенство именованныхъ чиселъ. Если два именованныя числа выражаютъ собою одно и то же значеніе величины, то такія

именованныя числа считаются равными между собою; напр., составное имен. число 2 саж. 1 арш. равно простому имен. числу 7 арш., потому что оба эти числа выражают одну и ту же длину.

Изъ двухъ неравныхъ именованныхъ чиселъ то считается бо́льшимъ, которое выражаетъ бо́льшее значеніе величины. Такъ, именованное число 3 фунта 40 зол. больше именованнаго числа 20 лот. 18 зол., такъ какъ вѣсъ, выраженный первымъ числомъ, больше вѣса, выраженнаго вторымъ числомъ.

Очень часто приходится преобразовывать одно именованное число въ другое именованное число, равное ему. Такихъ преобразованій есть два: раздробленіе и превращеніе.

101. Раздробленіе. Раздробленіемъ именованнаго числа наз. преобразованіе его въ единицы одного какого-нибудь низшаго разряда.

Примѣръ: 5 пуд. 4 фунта 15 лотовъ раздробить въ золотники.

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, узнаемъ сначала, сколько въ 5 пуд. заключается фунтовъ; къ полученному числу приложимъ 4 фунта; затѣмъ узнаемъ, сколько во всѣхъ фунтахъ заключается лотовъ; къ полученному числу приложимъ 15 лотовъ; наконецъ, узнаемъ, сколько во всѣхъ лотахъ заключается золотниковъ. Дѣйствія расположимъ такъ:

```
    5  пуд. 4 фун. 15 лотовъ.
  ×40
  ---
  200 . . . .фунтовъ въ 5 пудахъ.
   +4
  ---
  204 . . . . .фунта въ 5 пуд. 4 фунт.
  ×32
  ---
  408
 612
 ----
 6528 . . . . .лотовъ въ 5 пуд. 4 фун.
```

```
  6528 ..... лотовъ въ 5 пуд. 4 фунт.
   +15
  ----
  6543 ..... лота въ 5 пуд. 4 фунт. 15 лот.
    ×3
  ----
 19629 ..... золотниковъ въ 5 пуд. 4 фунт. 15 лот.
```

102. Превращеніе. Превращеніемъ именованнаго числа называется преобразованіе его въ единицы высшихъ разрядовъ.

Примѣръ: 19629 золотниковъ выразить въ мѣрахъ высшихъ разрядовъ.

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, узнаемъ сначала, сколько въ 19629 золотникахъ заключается лотовъ; потомъ, сколько въ полученномъ числѣ лотовъ заключается фунтовъ; потомъ, сколько въ этихъ фунтахъ пудовъ.

Дѣйствія расположимъ такъ:

```
19629 | 3
18    |------
----  | 6543  | 32
 16   | 64    |------
 15   | ---   | 204  | 40
 --   |  143  | 200  |------
  12  |  128  | ---  | 5 пуд.
  12  |  ---  |   4 фун.
  --  |   15 лот.
   9
   9
   --
   0 зол.
```

19629 зол.=5 пуд. 4 фун. 15 лот.

III. Дѣйствія надъ именованными числами.

103. Предварительное замѣчаніе. Если бы именованныя числа всегда выражались при помощи одной и той же единицы, то дѣйствія надъ ними ничѣмъ не отличались бы отъ дѣйствій надъ числами отвлеченными; такъ, складывать 215 пуд. и 560 пуд. надо совершенно такъ же,

какъ складываются 215 какихъ угодно единицъ съ 560 такими же единицами. Но именованныя числа часто выражаются при помощи единицъ различныхъ названій; тогда дѣйствія надъ ними производятся иначе, чѣмъ дѣйствія надъ числами отвлеченными.

104*. Смыслъ дѣйствій надъ именованными числами. Суммою нѣсколькихъ данныхъ значеній одной и той же величины наз. новое значеніе той же величины, составленное изъ частей, соотвѣтственно равныхъ даннымъ значеніямъ. Такимъ образомъ, напр., можетъ быть сумма нѣсколькихъ данныхъ длинъ, сумма нѣсколькихъ данныхъ вѣсовъ и т. п.

Понятіе о суммѣ служитъ основаніемъ для опредѣленія дѣйствій надъ значеніями величины. Эти опредѣленія слѣдующія.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго отыскивается сумма, называется сложеніемъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ и одному слагаемому отыскивается другое слагаемое, наз. вычитаніемъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго данное значеніе величины повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ данномъ числѣ есть единицъ, наз. умноженіемъ.

Дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію и одному изъ сомножителей отыскивается другой сомножитель, наз. дѣленіемъ.

Когда значенія величины измѣрены, то они выражаются именованными числами; тогда дѣйствія надъ значеніями величины становятся дѣйствіями надъ именованными числами; но смыслъ дѣйствій отъ этого не измѣняется.

105. Сложеніе. Для удобства подписываютъ слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного названія стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Начинаютъ сложеніе съ единицъ низшаго разряда; затѣмъ переходятъ послѣдовательно къ сложенію единицъ слѣдующихъ высшихъ разрядовъ. Напр.:

+	5 вер.	. 490 саж.	. . 6 фут.	11 дюйм.
	10 »	432 »	5 »	10 »
	8 »	460 »	4 »	9 »
	2 »	379 »	3 »	11 »
	3 »	446 »	2 »	10 »
	28 вер.	2207 саж.	20 фут.	51 дюйм.
	32 вер.	210 саж.	3 фут.	3 дюйм.

Послѣ сложенія получилось (подъ первою чертою) неправильно составленное именованное число; подъ нимъ проводятъ вторую черту и превращаютъ 51 дюймъ въ 4 фута и 3 д.; 3 д. подписываютъ подъ второю чертою на мѣстѣ дюймовъ, а 4 ф. прикладываютъ къ 20 ф.; 24 ф. превращаютъ въ 3 саж. и 3 ф.; 3 ф. подписываютъ подъ второю чертою, а 3 саж. прикладываютъ къ 2207 саж. и т. д.

Можетъ случиться, что въ одномъ или въ нѣсколькихъ слагаемыхъ нѣтъ единицъ такихъ названій, какія есть въ остальныхъ слагаемыхъ; тогда на мѣстахъ недостающихъ единицъ пишутъ нули. Напр.:

		1	1	
+	300 вер. . .	0 саж. . .	0 арш. . .	8 вершк.
	250 » . .	80 » . .	2 » . .	12 »
		30	1 » . .	0 »
	550 вер...	111 саж...	1 арш..	4 вершк.

(Здѣсь превращенія сдѣланы въ умѣ. Получившійся отъ сложенія вершковъ 1 аршинъ надписанъ наверху, надъ аршинами слагаемыхъ; то же сдѣлано съ саженью, получившеюся отъ сложенія аршинъ).

106. Вычитаніе. Пусть требуется вычесть 2 версты 80 саж. 2 арш. 5 вершк. изъ 9 вер. 50 саж. 2 арш. Подписываемъ въ извѣстномъ порядкѣ вычитаемое подъ уменьшаемымъ и проводимъ черту:

		549	4	16
	9 вер...	50 саж...	2 арш...	0 вершк.
—	2 » ..	80 » ..	2 » ..	5 »
	6 вер...	469 саж...	2 арш...	11 вершк.

Чтобы вычесть 5 вершковъ, беремъ отъ 2-хъ аршинъ 1 аршинъ (въ знакъ чего ставимъ точку надъ 2 арш.); взятый аршинъ раздробляемъ въ вершки; получаемъ 16 вершк.; пишемъ 16 надъ 0 вершк. и вычитаемъ 5 вершк. изъ 16 вершк.; оставшіеся 11 вершк. пишемъ подъ чертою. 2 арш. изъ 1 арш. вычесть нельзя; беремъ отъ 50 саж. одну сажень (въ знакъ чего ставимъ точку надъ числомъ саженъ); раздробляемъ взятую сажень въ аршины и прикладываемъ къ 1 арш. уменьшаемаго; получаемъ 4 аршина; пишемъ 4 надъ числомъ аршинъ. Теперь вычитаемъ 2 арш. изъ 4-хъ арш.; остатокъ 2 пишемъ подъ чертою. Продолжаемъ такъ дѣйствіе до конца.

Вотъ еще примѣръ вычитанія, въ которомъ на мѣста недостающихъ разрядовъ мѣръ поставлены нули:

		40	32	3
	5 пуд...	0 фунт.	0 лот.	0 зол.
—		16	24 »	2 зол.
	4 пуд...	23 фунт.	7 лот.	1 зол.

107. Умноженіе. Такъ какъ множитель означаетъ, сколько разъ множимое должно быть повторено слагаемымъ, то онъ всегда есть число отвлеченное. Поэтому надо только разсмотрѣть умноженіе именованнаго числа на отвлеченное.

Примѣръ I. (64 чт. 7 чк. 3 гарн.) × 6.

Расположимъ дѣйствіе такъ:

64 чт....	7 чк....	3 гарн.
		× 6
384 чт...	42 чк....	18 гарн.
389 чт...	4 чк....	2 гарн.

Умноживъ на 6 отдѣльно гарнцы, четверики и четверти, получимъ (подъ первою чертою) неправильно составленное именованное число: 384 чт. 42 чк. 18 гарн. Чтобы преобразовать его въ правильно составленное именованное число, превращаемъ (въ умѣ или на сторонѣ) 18 гарн. въ 2 чк. и въ 2 гарн.; 2 гарнца подписываемъ подъ второю чертою, а 2 чк. прикладываемъ къ 42 чк., отчего получаемъ 44 чк.; превращаемъ эти 44 чк. въ 5 чт. и 4 чк.; 4 чк. подписываемъ подъ второю чертою, а 5 чт. прикладываемъ къ 384 чт.; получимъ 389 чт.

Примѣръ 2. (26 пуд. 38 фунт. 84 зол.)×78.

Когда множитель состоитъ изъ двухъ или болѣе цыфръ, то лучше производить на сторонѣ какъ умноженія отдѣльныхъ чиселъ множимаго, такъ и превращенія. Дѣйствіе полезно расположить такъ:

26 пуд.... 38 фун.... 84 зол.
×78

2103 пуд.... 32 фун.... 24 зол.

84	38	26
× 78	× 78	× 78
672	304	208
588	266	182
6552 | 96	2964	2028
576 68	+68	+75
792	3032 | 40	**2103** пуд.
768	280 75	
24 зол.	232	
	200	
	32 фун.	

Умноживъ на сторонѣ (подъ горизонтальной чертой, въ первомъ слѣва столбцѣ) 84 зол. на 78, мы получаемъ 6552 зол. Превращеніемъ узнаемъ, что 6552 зол. составля-

ютъ 68 фун. и 24 зол. Эти 24 зол. подписываемъ въ произведеніи (подъ горизонтальной чертой), а 68 фунт. пока оставляемъ. Умноживъ затѣмъ на сторонѣ (во второмъ столбцѣ) 38 фун. на 78, мы получаемъ 2964 ф.; прибавляемъ къ нимъ 68 ф., получившіеся послѣ умноженія золотниковъ. Превращаемъ 3032 ф. въ пуды. Получаемъ 75 пуд. и 32 фунт. Эти 32 ф. пишемъ въ произведеніи (подъ горизонтальной чертой), а 75 пуд. пока оставляемъ. Затѣмъ такимъ же образомъ умножаемъ пуды.

108. Дѣленіе. Дѣленіе именованныхъ чиселъ, какъ и отвлеченныхъ, имѣетъ двоякое значеніе:

1) по данному произведенію и данному множимому найти множителя; другими словами, узнать, сколько разъ въ одномъ именованномъ числѣ содержится другое именованное число;

2) по данному произведенію и данному множителю найти множимое; другими словами, данное именованное число разложить на столько равныхъ частей, сколько въ данномъ отвлеченномъ числѣ находится единицъ.

Разсмотримъ по одному примѣру на каждый изъ этихъ случаевъ.

I) Дѣленіе именованнаго числа на именованное.

Пусть требуется узнать, сколько разъ 8 ф. 2 л. содержатся въ 3 п. 18 фунт. Для этого раздробимъ дѣлимое и дѣлителя въ мѣры одного названія, и притомъ въ самыя мелкія, какія есть въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ, т.-е. въ нашемъ примѣрѣ—въ лоты:

```
3 п.... 18 фун.          8 фун... 2 л.
×40                      ×32
 120                      256
+18                       +2
 138                      258 лотовъ.
×32
 276
414
4416 лотовъ.
```

Теперь узнаемъ, сколько разъ 258 лот. содержатся въ 4416 лотахъ:

```
4416 | 258
258    17
----
1836
1806
----
  30
```

Мы узнали такимъ образомъ, что 258 лот. (т.-е. 8 ф. 2 л.) содержатся въ 4416 лот. (т.-е. въ 3 п. 18 ф.) 17 разъ, при чемъ 30 лот. остаются въ остаткѣ.

Замѣчаніе. При дѣленіи именованнаго числа на именованное частное есть число отвлеченное, потому что оно означаетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.

2) Дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное.

Пусть требуется 18 верстъ 137 саж. 2 арш. раздѣлить на 14 равныхъ частей. Для этого всего удобнѣе поступить такъ: раздѣлимъ 18 верстъ на 14 (равныхъ частей); оставшіяся отъ дѣленія версты раздробимъ въ сажени; приложимъ 137 саж.; раздѣлимъ получившееся число саж. на 14 (равныхъ частей); оставшіяся сажени раздробимъ въ аршины; приложимъ 2 арш.; наконецъ, раздѣлимъ получившееся число аршинъ на 14 (равныхъ частей).

Дѣйствіе располагается такъ:

```
18 в... 137 саж... 2 ар. | 14
14                       | 1 в. 152 с. 2 ар. 1 вер.
----
  4...версты въ остаткѣ.
 × 500
----
 2000
 +137
----
 2137... сажень.
```

2137 сажепъ.
73:
37
9... саж. въ остаткѣ
×3
27
+2
29... аршинъ.
1... арш. въ остаткѣ.
×16
16... вершковъ.
2... вершк. въ остаткѣ.

Замѣчаніе. При дѣленіи именованнаго числа на отвлеченное частное всегда должно быть числомъ именованнымъ, такъ какъ оно представляетъ собою одну изъ частей дѣлимаго.

IV. Задачи на вычисленіе времени.

109,1. Задача 1. Пароходъ вышелъ изъ гавани 27-го апрѣля, въ 7 часовъ утра. Когда пароходъ возвратился въ эту гавань, если онъ пробылъ въ плаваніи 6 мѣс. 8 дней 21 часъ 40 мин.?

Первое рѣшеніе. Когда говорятъ, что отъ такого-то числа такого-то мѣсяца прошелъ 1 мѣсяцъ, то это значитъ, что наступило *такое же* число слѣдующаго мѣсяца. Если, напр., отъ 27-го апрѣля (7 часовъ утра) прошелъ 1 мѣсяцъ, то это значитъ, что наступило 27-е мая (7 часовъ утра). Замѣтивъ это, будемъ рѣшать нашу задачу такъ:

Возвращеніе парохода произошло позже его отбытія на 6 мѣс. 8 дней 21 ч. 40 м. Это значитъ, что послѣ его отбытія прошло сначала 6 мѣс., потомъ 8 дней, затѣмъ 21 часъ 40 м. и тогда пароходъ возвратился *). Когда отъ 27-го

---

*) Въ такомъ порядкѣ считаютъ обыкновенно. Во всякомъ случаѣ должно предварительно условиться относительно порядка

апрѣля (7-ми часовъ утра) прошелъ 1 мѣсяцъ, то наступило 27-е мая (7 час. утра); когда прошелъ другой мѣсяцъ, наступило 27-е іюня (7 час. утра); продолжая такъ прикладывать по 1 мѣсяцу 6 разъ, получимъ 27-е октября (7 час. утра). Послѣ этого прошло еще 8 дней. Такъ какъ въ октябрѣ 31 день, то изъ этихъ 8 дней 4 дня приходились на октябрь, а остальные 4 дня—на ноябрь. Значитъ, наступило 4-е ноября (7 часовъ утра). Потомъ прошло еще 21 часъ. Если бы прошло 24 часа, то было бы 5-е ноября 7 час. утра. Но 21 часъ менѣе 24-хъ на 3 часа; значитъ, было 5-е ноября 4 часа утра; наконецъ, прошло еще 40 мин. и тогда пароходъ возвратился. Итакъ, возвращеніе парохода было 5-го ноября въ 4 часа 40 мин. утра того же года.

Такъ обыкновенно и рѣшаются подобныя задачи, если промежутокъ времени, протекшій отъ одного событія до другого, не великъ. Въ противномъ случаѣ удобнѣе будетъ слѣдующій пріемъ.

Второе рѣшеніе. Предварительно узнаемъ, сколько времени прошло съ начала года, т.-е. съ 1-го января, до 27-го апрѣля 7-ми часовъ утра. Прошло 3 мѣсяца: январь, фе-

---

слѣдованія годовъ, мѣсяцевъ и дней, такъ какъ величина промежутка времени, выраженнаго въ такихъ, не вполнѣ постоянныхъ единицахъ, зависитъ отъ порядка ихъ. Напр., промежутокъ времени, слѣдующій за 27-мъ апрѣля и равный 6 мѣс.+ +8 дней, не равенъ промежутку времени, слѣдующему тоже за 27-мъ апрѣля, но равному 8 дн.+6 мѣс. Это видно изъ слѣдующей таблицы:

27-е апрѣля.

Прошло 6 мѣс.	27-е окт.	Прошло 8 дней	5-е мая.
Прошло 8 дней	4-е ноябр.	Прошло 6 мѣс.	5-е ноября.

Такимъ образомъ оказывается, что промежутокъ, слѣдующій за 27 апрѣля и равный 6 м.+8 дн., короче промежутка 8 дн.+ 6 мѣс. Причина будетъ ясна изъ слѣдующаго расчета:

6 мѣс. послѣ 27-го апр.		6 мѣс. послѣ 5-го мая.	
1) 27 апр. —27 мая	30 дн.	1) 5 мая —5 іюня	31 д
2) 27 мая —27 іюня	31 д.	2) 5 іюня—5 іюля	30 д.
3) 27 іюня—27 іюля	30 д.	3) 5 іюля—5 авг.	31 д.
4) 27 іюля—27 авг.	31 д.	4) 5 авг. —5 сент.	31 д.
5) 27 авг. —27 сент.	31 д.	5) 5 сент.—5 окт.	30 д.
6) 27 сент.—27 окт.	30 д.	6) 5 окт. —5 ноябр.	31 д.
	183		184

враль и мартъ, и 26 дней апрѣля; такъ какъ отбытіе произошло въ 7 часовъ утра, то, значитъ, прошло еще 7 часовъ слѣдующаго дня (27 апрѣля). Всего съ начала года до отбытія парохода прошло 3 мѣс. 26 дн. 7 час. Теперь приложимъ къ этому числу 6 мѣс. 8 дней 21 час. 40 мин.:

	3 мѣс....	26 дн....	7 час.	
+	6 » ...	8 » ...	21 » ...	40 мин.
	9 мѣс....	34 дн....	28 час...	40 мин.
	10 мѣс....	4 дн....	4 час...	40 мин.

Превращая 35 дней въ мѣсяцы, мы должны задаться вопросомъ, во сколько дней считать мѣсяцъ. Для этого обратимъ вниманіе, что отъ начала года прошло 9 мѣсяцевъ; значитъ, изъ 35 дней долженъ составиться 10-й мѣсяцъ, а 10 мѣсяцъ (октябрь) содержитъ 31 день; поэтому изъ 35 дней осталось 4 дня, а 31 день составили 1 мѣсяцъ (который мы приложили къ 9 мѣсяцамъ) *).

Мы узнали, что отъ начала года до возвращенія парохода прошло 10 мѣс. 4 дня 4 часа 40 мин. Но это не окончательный отвѣтъ на вопросъ, потому что требовалось узнать, когда пароходъ возвратился, а не сколько времени прошло отъ начала года до возвращенія парохода. Поэтому передѣлаемъ отвѣтъ такъ, чтобы онъ отвѣчалъ на вопросъ «когда?» Если прошло 10 мѣсяцевъ, то, значитъ, начался 11-й мѣсяцъ: ноябрь. Если прошло 4 дня этого мѣсяца, то, значитъ, началось уже 5-е число ноября. Итакъ, пароходъ возвратился 5-го ноября въ 4 часа 40 мин. утра.

109,2. Задача 2. Путешественникъ возвратился домой 5-го ноября въ 2 часа 10 мин. пополудни. Когда онъ отправился въ путешествіе, если его отсутствіе изъ дома продолжалось 4 мѣс. 25 дн. 19 час.?

---

*) Разсмотрѣвъ внимательно сложеніе, которое намъ пришлось выполнить въ этой задачѣ, мы легко замѣтимъ, что въ немъ сохраненъ тотъ порядокъ слѣдованія (дни за мѣсяцами), о которомъ мы говорили въ предыдущей выноскѣ. Въ самомъ дѣлѣ, 35 дней мы прибавляемъ после того, какъ прибавлены 6 мѣсяцевъ, а не раньше.

Первое рѣшеніе. Отсутствіе путешественника продолжалось 4 мѣс. 25 дней 19 часовъ. Это надо понимать такъ: послѣ отправленія въ путешествіе прошло сначала 4 мѣс., потомъ прошло еще 25 дней, затѣмъ еще 19 часовъ, и тогда путешественникъ возвратился, т.-е. тогда наступило 5-е ноября 2 часа 10 мин. пополудни. Поэтому, чтобы опредѣлить время отбытія путешественника, мы отъ «5-го ноября 2 часа 10 мин. пополудни» мысленно отодвинемся назадъ сначала на 19 часовъ, потомъ еще на 25 дней и, наконецъ, еще на 4 мѣсяца. Если бы отодвинуться назадъ не на 19 часовъ, а на 24 часа, то получилось бы 4-е ноября 2 часа 10 мин. пополудни. Но 19 часовъ менѣе 24-хъ часовъ на 5 час.; слѣд., получимъ 4-ое ноября 7 час. 10 мин. пополудни. Теперь отодвинемся назадъ на 25 дней. Сбросивъ 4 дня, получимъ 31 октября; отодвинувшись еще на 21 день, получимъ 10-е октября 7 час. 10 мин. пополудни. Теперь сбросимъ 4 мѣсяца. Получимъ 10-е іюня 7 час. 10 мин. пополудни *).

Когда промежутокъ времени, который надо отнять, выражается большими числами, то удобнѣе рѣшать задачу слѣдующимъ пріемомъ.

Второе рѣшеніе. Узнаемъ, сколько времени прошло отъ начала года до 5 ноября 2 час. 10 мин. пополудни. Прошло 10 мѣсяцевъ (январь, февраль... октябрь), 4 дня (ноября) и нѣсколько часовъ и минутъ. Чтобы узнать, сколько часовъ и минутъ, примемъ во вниманіе, что за начало дня считается полночь. Отъ полуночи до полудня прошло 12 часовъ; но возвращеніе совершилось въ 2 часа 10 мин. пополудни; значитъ, отъ полуночи до возвращенія прошло 14 час. 10 мин. Всего отъ начала года до возвращенія путешественника прошло 10 мѣс. 4 дня 14 час. 10 мин.

*) И въ этой задачѣ получили бы другой отвѣтъ (9 Іюня), если бы мы отсчитывали сначала 4 мѣсяца, потомъ 25 дней, а потомъ 19 часовъ, т.-е. если бы мы понимали продолжительность путешествія не какъ сумму 4 мѣс.+25 дней+19 час., а какъ сумму 19 час.+25 дней+4 мѣсяца.

Теперь вычтемъ изъ этого числа то время, которое путешественникъ пробылъ въ путешествіи:

	34	38	
10 мѣс...	4 дня...	14 час...	10 мин.
4 » ..	25 » ...	19 » ...	0
5 мѣс...	9 дн.....	19 час...	10 мин.

При вычитаніи дней намъ пришлось занять одинъ мѣсяцъ и раздробить его въ дни. Въ такихъ случаяхъ надо сообразить, какой мѣсяцъ раздробляемъ въ дни, потому что не всѣ мѣсяцы содержатъ одинаковое число дней. Въ нашей задачѣ 3 дня уменьшаемаго принадлежатъ ноябрю (потому что 10 мѣс., начиная съ начала года, уже прошли); такъ какъ 25 дней вычитаемаго нельзя отнять отъ этихъ 3-хъ дней ноября, то приходится часть ихъ отнимать отъ 10-го мѣсяца, т.-е. отъ октября; октябрь имѣетъ 31 день; прибавивъ 31 день къ 3 днямъ ноября, получимъ 34 дня.

Сдѣлавъ вычитаніе, мы узнали, что отъ начала года до отправленія путешественника въ путь прошло 5 мѣс. 9 дней 19 часовъ 10 мин. Но это не окончательный отвѣтъ, потому что требовалось узнать, когда произошло отправленіе. Передѣлаемъ отвѣтъ такъ, чтобы онъ отвѣчалъ на вопросъ: «когда?» Если прошло 5 мѣс., то, значитъ, наступилъ 6-й мѣсяцъ, іюнь; если 9 дней этого мѣсяца прошли, то, значитъ, наступило 10-е іюня; притомъ 10-го іюня прошло уже 19 час. 10 мин.; значитъ, часы будутъ показывать 7 час. 10 мин. пополудни. Итакъ, путешественникъ отправился въ путь 10-го іюня въ 7 час. 10 мин. пополудни того же года.

109,з. Задача 3. Императоръ Александръ I вступилъ на престолъ 12-го марта 1801-го года и скончался 19-го ноября 1825-го года. Сколько времени царствовалъ Императоръ Александръ I?

Первое рѣшеніе. Отъ 12-го марта 1801 года до 12-го марта 1825 года прошло ровно 24 года. Отъ 12-го марта 1825 года

до 12-го ноября того же года прошло 8 мѣсяцевъ; наконецъ отъ 12 ноября до 19 ноября прошло 7 дней; значитъ, Александръ I царствовалъ 24 года 8 мѣс. и 7 дней.

Второе рѣшеніе. До 12 марта 1801 года отъ Р. Хр. прошло 1800 лѣтъ 2 мѣсяца и 11 дней, а до 19-го ноября 1825-го года прошло 1824 года 10 мѣс. 18 дней. Для рѣшенія задачи надо, очевидно, вычесть изъ послѣдняго числа первое:

	1824 года....	10 мѣс....	18 дней.
—	1800 »	2 »	11 »
	24 года....	8 мѣс....	7 дней.

Это будетъ окончательный отвѣтъ, потому что въ задачѣ требовалось узнать, сколько времени царствовалъ Императоръ Александръ I.

109,4*. Точный счетъ времени. Въ описанныхъ примѣрахъ рѣчь идетъ о такъ называемомъ календарномъ счетѣ времени, по которому промежутокъ времени выражается въ единицахъ, не вполнѣ постоянныхъ, т.-е. въ годахъ и мѣсяцахъ. По точному счету промежутокъ времени долженъ быть выраженъ въ постоянныхъ единицахъ, т.-е. въ недѣляхъ, дняхъ и подраздѣленіяхъ дня. Календарный счетъ употребляется во многихъ вопросахъ практической жизни, когда не важно знать точный размѣръ какого-нибудь промежутка времени, а только число календарныхъ годовъ и мѣсяцевъ, заключавшееся въ немъ (напр., при уплатѣ жалованья, разсчитываемаго обыкновенно по мѣсяцамъ).

Покажемъ здѣсь на двухъ примѣрахъ, какъ слѣдуетъ поступать въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣчь идетъ о точномъ счетѣ времени.

Предварительно замѣтимъ, что по календарному счету промежутокъ времени отъ какого-нибудь момента даннаго года до такого же момента слѣдующаго года (напр., отъ полудня 15-го марта 1914 г. до полудня 15-го марта 1915 г.) принимается равнымъ году; подобно этому, промежутокъ отъ какого-нибудь момента одного мѣсяца до такого же момента слѣдующаго мѣсяца (напр., отъ 2 час. дня 13-го мая до 2 час. дня 13-го іюня того же года) прини-

мается за мѣсяцъ. Годовой промежутокъ содержитъ въ себѣ 366 дней или 365, смотря по тому, было ли въ этомъ промежуткѣ 29-е число февраля, или не было. Напр., годъ отъ 15-го іюня 1895 года до 15-го іюня 1896 года содержалъ въ себѣ 366 дней, такъ какъ въ этомъ промежуткѣ было 29-е февраля (1896 годъ—високосный); промежутокъ же отъ 15-го іюня 1913 года до 15-го іюня 1914 года имѣлъ 365 дней, такъ какъ февраль въ 1914 году содержалъ только 28 дней. Мѣсячный промежутокъ можетъ содержать въ себѣ 28, 29, 30 и 31 день, смотря по тому, будетъ ли въ этомъ промежуткѣ послѣднее число мѣсяца 28-е, или 29-е, или 30-е, или 31-е. Напр.:

отъ 20 февр. 1912 г. до 20 марта 1912 г. прошло 29 дн. (въ 1912 г. послѣднее число февраля—29-е);

отъ 20 февр. 1911 г. до 20 марта 1911 г. прошло 28 дн. (въ 1911 г. послѣднее число февраля—28-е);

отъ 20 марта любого года до 20 апр. того же года—31 д. (послѣднее число марта есть 31-е);

отъ 20 апр. любого года до 20 мая того же года—30 дн. (послѣднее число апрѣля есть 30-е).

Замѣтивъ это, рѣшимъ слѣдующіе примѣры.

Примѣръ 1. Начало событія . . . . 13-го сентября 1890 г.
Конецъ событія . . . . . 2-го іюня 1897 г.

Опредѣлимъ точную величину продолжительности его.

			32
Отъ Р. Хр. до конца событія прошло	1896 л.	5 м.	1 д.
Отъ Р. Хр. до начала событія прошло	1889 л.	8 м.	12 д.
Продолжительность событія по кал. счету	6 л.	8 м.	20 д.

Выразимъ теперь найденный промежутокъ времени въ дняхъ. Предположимъ сначала, что каждый годъ имѣетъ 365 дней, а каждый мѣсяцъ 30 дней. Тогда число дней будетъ:

$$365 \cdot 6 + 30 \cdot 8 + 20 = 2190 + 240 + 20 = 2450.$$

Теперь исправимъ этотъ счетъ. Во-первыхъ, разсчитаемъ, сколько изъ 6-ти годовъ нашего промежутка было високосныхъ. 29-е февраля приходилось въ 1892 г. и въ 1896 г. Значитъ, число дней должно быть увеличено на 2. Во-вторыхъ, опредѣлимъ поправку на мѣсяцы. Когда отъ 13 сентября 1890 года прошло

6 лѣтъ, то наступило 13 сентября 1896 года; затѣмъ еще прошли 8 мѣсяцевъ. Значитъ, эти 8 мѣсяцевъ обнимаютъ собою промежутокъ времени отъ 13 сентября 1896 года до 13 мая 1897 г. За этотъ промежутокъ 31-ое число приходилось 4 раза: въ октябрѣ, декабрѣ, январѣ и мартѣ; кромѣ того, въ этомъ промежуткѣ былъ февраль. Такъ какъ это—февраль 1897 года (годъ простой), то онъ содержалъ въ себѣ 28 дней. Значитъ, число дней въ нашихъ 8 мѣсяцахъ должно быть увеличено на 4—2, а число дней во всемъ нашемъ промежуткѣ должно быть увеличено на 2+4—2, т.-е. на 4, и потому оно должно быть 2454.

Примѣръ 2. Нѣкоторое событіе продолжалось 800 дней 20 час. 13 мин. Начало этого событія было въ 7 час. 40 м. вечера 18 февраля 1893 года. Опредѣлить моментъ, въ который событіе окончилось.

Считая годъ въ 365 дней и мѣсяцъ въ 30 дней, найдемъ, что 800 дней составляютъ 2 года 2 мѣс. 10 дней; значитъ, 800 д. 20 ч. 13 м.=2 г. 2 м. 10 д. 20 ч. 13 м. (приблизительно).

Отъ Рожд. Хр. до начала событія прошло 1892 г. 1 мѣс. 17 дней 19 час. 40 мин. Прибавимъ къ этому времени приблизительную величину даннаго промежутка:

	1892 г.	1 м.	17 д.	19 час.	40 мин.
+	2 г.	2 м.	10 д.	20 час.	13 мин.
	1894 г.	3 м.	28 д.	15 час.	53 мин.

Теперь сдѣлаемъ поправки, т.-е. опредѣлимъ, насколько мы ошиблись, допустивъ, что 800 д.=2 года 2 мѣс. 10 дн. Эти 2 года слѣдовали за 18 февр. 1893 года по 18 февр. 1895 года. Въ этомъ промежуткѣ високосныхъ годовъ не было; значитъ, въ нашемъ предположеніи, что годъ=365 дн., не было ошибки. 2 мѣсяца слѣдовали за 18 февр. 1895 г.; значитъ, это были мѣсяцы:

1) отъ 18 февраля 1895 г. до 18 марта 1895 г.	28 дней.
2) отъ 18 марта 1895 г. до 18 апрѣля 1895 г.	31 день.
	59 дней.

Мы предполагали, что эти 2 мѣсяца содержатъ 60 дней, а на самомъ дѣлѣ они имѣли на 1 день меньше; значитъ, 800

дней составляютъ не 2 года 2 мѣс. 10 дн., а 2 года 2 мѣс. 11 дн.; поэтому въ найденной суммѣ мы должны увеличить число дней на 1. Сдѣлавъ это, найдемъ, что отъ Рожд. Христ. до конца событія прошло:

1894 года 3 мѣс. 29 дн. 15 час. 53 мин.

и, значитъ, конецъ событія произошелъ въ 1895 году апрѣля 30-го въ 3 часа 53 мин. пополудни.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

О дѣлимости чиселъ.

I. Признаки дѣлимости.

110. Двѣ истины, на которыхъ основано нахожденіе признаковъ дѣлимости. Когда одно число дѣлится на другое безъ остатка, то для краткости рѣчи говорятъ просто, что первое число **дѣлится** на второе. Такъ, говорятъ: 15 дѣлится на 3, но не дѣлится на 4.

Существуютъ признаки, по которымъ легко узнать, не производя дѣленія на самомъ дѣлѣ, дѣлится или не дѣлится данное число на нѣкоторыя другія данныя числа. Нахожденіе этихъ признаковъ дѣлимости основано на слѣдующихъ двухъ истинахъ.

1) Если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на это число.

Возьмемъ, напр., сумму: 15+20+40, въ которой каждое слагаемое дѣлится на 5. Это значитъ, что каждое изъ этихъ чиселъ можетъ быть составлено сложеніемъ пятерокъ; тогда и сумма ихъ можетъ быть составлена сложеніемъ пятерокъ. Такъ, сложивъ 3 пятерки, получимъ 15; приложимъ еще 4 пятерки, получимъ 15+20; наконецъ, добавивъ еще 8 пятерокъ, получимъ 15+20+40; значитъ, сумма эта должна дѣлиться на 5 *).

*) Вообще, если каждое изъ чиселъ: a, b, c... дѣлится на число q, то это значитъ, что $a=a_1q$, $b=b_1q$, $c=c_1q$... . гдѣ a_1 b_1, c_1,... суть частныя отъ дѣленія a, b, c,... на q. Тогда:

$$a+b+c\,..=a_1q+b_1q+c_1q+\ldots$$

2) Если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится, а другое не дѣлится на какое-нибудь число, то сумма ихъ не раздѣлится на это число.

Возьмемъ, напр., 2 числа: 20 и 17, изъ которыхъ первое дѣлится, а второе не дѣлится на 5. Это значитъ, что 20 можно составить сложеніемъ пятерокъ, а 17 нельзя. Въ такомъ случаѣ сумма 20 + 17 не можетъ быть составлена сложеніемъ пятерокъ, т.-е. эта сумма не дѣлится на 5*).

111. Признакъ дѣлимости на 2. Замѣтимъ, что всѣ числа, которыя дѣлятся на 2, наз. **четными**, а тѣ, которыя не дѣлятся на 2, наз. **нечетными**.

Десятокъ дѣлится на 2; поэтому сумма какого-угодно числа десятковъ дѣлится на 2. Всякое число, оканчивающееся нулемъ, есть сумма нѣсколькихъ десятковъ; напр., 430 есть сумма 43 десятковъ. Значитъ, всякое число, оканчивающееся нулемъ, дѣлится на 2.

Возьмемъ теперь два числа, изъ которыхъ одно оканчивается нечетною, а другое—четною цыфрою, напр., 327 и 328. Ихъ можно представить въ видѣ суммъ такъ:

$$327=320+7; \qquad 328=320+8.$$

Число 320 оканчивается нулемъ и потому дѣлится на 2; 7 не дѣлится на 2 и потому 327 не раздѣлится на 2 (если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится, а другое не дѣлится на какое-нибудь число, то сумма не раздѣлится на это число). Слагаемое 8 дѣлится на 2, поэтому 328 раздѣлится на 2 (если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на это число). Изъ этого слѣдуетъ:

Но послѣдняя сумма, по распредѣлительному свойству произведенія (§ 61,*a*), равна $(a_1+b_1+c_1+\dots)\,q$, слѣд., она дѣлится на q, значитъ, и сумма $a+b+c+\dots$ дѣлится на q.

*) Если a дѣлится, а b не дѣлится на q, то $a=a_1q$ и $b=b_1q+r$, гдѣ r есть остатокъ отъ дѣленія b на q. Тогда $a+b=a_1q+(b_1q+r)$. Послѣдняя сумма, согласно сочетательному свойству, равна суммѣ a_1q+b_1q+r, которая, по распредѣлительному свойству произведенія, равносильна суммѣ $(a_1+b_1)q+r$. Отсюда видно, что при дѣленіи суммы $a+b$ на q получается частное a_1+b_1 и остатокъ r. Значитъ, сумма $a+b$ не дѣлится на q.

на 2 дѣлится только такое число, которое оканчивается нулемъ или четною цыфрою.

112. Признакъ дѣлимости на 4. Сотня дѣлится на 4; поэтому сумма какого-угодно числа сотенъ дѣлится на 4. Всякое число, оканчивающееся двумя нулями, есть сумма нѣсколькихъ сотенъ (напр., 1300 есть сумма 13 сотенъ); значитъ, всякое число, оканчивающееся двумя нулями, дѣлится на 4.

Возьмемъ теперь два числа такихъ, чтобы у одного сумма десятковъ съ единицами не дѣлилась на 4, а у другого дѣлилась, напр., 2350 и 2348. Ихъ можно представить въ видѣ суммъ такъ:

$$2350=2300+\mathbf{50}; \qquad 2348=2300+\mathbf{48}.$$

Число 2300 оканчивается двумя нулями и потому дѣлится на 4; 50 не дѣлится на 4; поэтому 2350 не раздѣлится на 4 (если одно слагаемое дѣлится, а другое не дѣлится, то...); 48 дѣлится на 4; поэтому 2348 раздѣлится на 4 (если каждое слагаемое дѣлится, то...). Изъ этого слѣдуетъ:

на 4 дѣлится только такое число, которое оканчивается двумя нулями или у котораго двѣ послѣднія цыфры выражаютъ число, дѣлящееся на 4 *).

113. Признакъ дѣлимости на 8. Тысяча дѣлится на 8; поэтому сумма какого-угодно числа тысячъ дѣлится на 8. Значитъ, всякое число, оканчивающееся тремя нулями, дѣлится на 8.

Возьмемъ теперь два числа такихъ, чтобы у одного сумма сотенъ, десятковъ и единицъ не дѣлилась на 8, а у другого дѣлилась, напр., 73150 и 73152. Ихъ можно представить въ видѣ суммъ такъ:

$$73150=73000+\mathbf{150}; \qquad 73152=73000+\mathbf{152}$$

Число 73000 оканчивается тремя нулями и потому дѣ-

*) Подобнымъ же образомъ можно вывести аналогичный признакъ дѣлимости на 25.

лится на 8; 150 не дѣлится, а 152 дѣлится на 8. Изъ этого заключаемъ, что 73150 не дѣлится, а 73152 дѣлится на 8. Слѣд.:

на 8 дѣлится только такое число, которое оканчивается тремя нулями или у котораго три послѣднія цыфры выражаютъ число, дѣлящееся на 8 *).

114. Признакъ дѣлимости на 5 и на 10. Десятокъ дѣлится на 5 и на 10; поэтому число, составленное изъ десятковъ, т.-е. оканчивающееся нулемъ, дѣлится на 5 и на 10. Если число не оканчивается нулемъ, то оно не дѣлится на 10, а на 5 оно раздѣлится только тогда, когда послѣдняя его цыфра будетъ 5, потому что изъ всѣхъ однозначныхъ чиселъ только 5 дѣлится на 5. Итакъ:

на 5 дѣлится только такое число, которое оканчивается нулемъ или цыфрою 5;

на 10 дѣлится только такое число, которое оканчивается нулемъ.

115. Признаки дѣлимости на 3 и на 9. Предварительно замѣтимъ, что и на 3, и на 9 дѣлится всякое число, написанное посредствомъ только цыфры 9, т.-е. 9, 99, 999 и т. п. Дѣйствительно:

$$999 : 3 = 333;\ 9999 : 3 = 3333;$$
$$999 : 9 = 111;\ 9999 : 9 = 1111;\ \text{и т. д.}$$

Замѣтивъ это, возьмемъ какое-нибудь число, напр., 2457, и разложимъ его на отдѣльныя единицы различныхъ разрядовъ (кромѣ простыхъ единицъ, которыя оставимъ не разложенными):

$$\begin{aligned}2457 = {} & 1000+1000 \\ & +100+100+100+100 \\ & +\ 10+10+10+10+10 \\ & +\ 7\end{aligned}$$

*) Подобнымъ же образомъ можно вывести аналогичный признакъ дѣлимости на 125.

Разложимъ каждую тысячу на 999 и 1, каждую сотню—на 99 и 1, каждый десятокъ—на 9 и 1. Тогда вмѣсто 2 тысячъ получимъ 2 раза по 999 и 2 единицы; вмѣсто 4 сотенъ получимъ 4 раза по 99 и 4 единицы; вмѣсто 5 десятковъ—5 разъ по 9 и еще 5 ед. Слѣд.:

$$
\begin{aligned}
2457 = 999 + 999 \qquad\qquad &+2\\
99+99+99+99 &+4\\
9+9+9+9+9 &+5\\
&+7
\end{aligned}
$$

Слагаемыя 999, 99 и 9 дѣлятся на 3 и на 9; значитъ, дѣлимость даннаго числа на 3, или на 9, зависитъ только отъ суммы 2+4+5+7; если эта сумма дѣлится или не дѣлится на 3, или на 9, то и данное число дѣлится или не дѣлится на эти числа. Сумма 2+4+5+7 есть сумма чиселъ, выражаемыхъ цыфрами даннаго числа, написанными отдѣльно; для краткости говорятъ, что это есть **сумма цыфръ** даннаго числа. Поэтому можемъ сказать:

на 3 дѣлится только такое число, у котораго сумма цыфръ дѣлится на 3;

на 9 дѣлится только такое число, у котораго сумма цыфръ дѣлится на 9.

Въ нашемъ примѣрѣ сумма цыфръ равна 18; 18 дѣлится на 3 и на 9; значитъ, 2457 тоже дѣлится и на 3, и на 9. Дѣйствительно:

$$2457 : 3 = 819;\ 2457 : 9 = 273.$$

116. Признакъ дѣлимости на 6. Если какое-нибудь число дѣлится на 6, то оно должно раздѣлиться и на 2, и на 3, т.-е. на тѣ числа, на которыя дѣлится 6. Дѣйствительно, если какое-нибудь число дѣлится на 6, то, значитъ, его можно разложить на шестерки, т.-е. представить его въ видѣ суммы:

$$6+6+6+6+\ldots$$

Но каждую шестерку можно разложить и на двойки

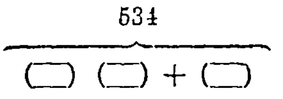
(2+2+2), и на тройки (3+3); значитъ, и все такое число можно разложить и на двойки, и на тройки; слѣд., оно должно дѣлиться и на 2, и на 3.

Изъ этого слѣдуетъ, что если какое-нибудь число не дѣлится на 2, или не дѣлится на 3, то такое число не можетъ раздѣлиться на 6, такъ какъ если бы оно дѣлилось на 6, то раздѣлилось бы и на 2, и на 3. Значитъ, для того, чтобы какое-нибудь число дѣлилось на 6, **необходимо**, чтобы оно дѣлилось и на 2, и на 3.

Такимъ образомъ, дѣлимость даннаго числа на 2 и на 3 составляетъ **необходимый** признакъ дѣлимости этого числа на 6. Разъяснимъ теперь, что этотъ признакъ и **достаточенъ**, т.-е. что если какое-нибудь число дѣлится на 2 и на 3, то этого достаточно, чтобы оно раздѣлилось на 6*).

Возьмемъ, напр., число 534, которое дѣлится и на 2, и на 3; разъяснимъ, что оно раздѣлится и на 6.

Если 534 дѣлится на 3, то его можно разложить на 3 равныя части. Предположимъ, что оно разложено на эти части и что 2 части соединены въ одну группу; тогда 534 представится въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ такъ:



Первое слагаемое, состоящее изъ двухъ равныхъ частей, конечно, дѣлится на 2. Если бы второе слагаемое не дѣлилось на 2, то тогда и сумма 534 не дѣлилась бы на 2 (если одно слагаемое дѣлится, а другое не дѣлится на какое-нибудь число, то сумма не раздѣлится на это число). Но

*) Чтобы показать, что необходимый признакъ можетъ иногда оказаться недостаточнымъ, приведемъ слѣдующій примѣръ. Если какое-нибудь число дѣлится на 24, то оно дѣлится также и на 4, и на 6; значитъ, для того, чтобы число дѣлилось на 24 необходимо, чтобы оно дѣлилось и на 4, и на 6. Но этого еще недостаточно: число можетъ дѣлиться на 4 и на 6 и въ то же время не дѣлиться на 24, напр., 36 дѣлится и на 4, и на 6, но на 24 оно не дѣлится.

534 дѣлится на 2; значитъ, и второе слагаемое должно дѣлиться на 2; а второе слагаемое есть третья часть числа 534; если же третья часть дѣлится на 2 равныя части, то все число дѣлится на 6 равныхъ частей.

Теперь мы можемъ утверждать, что **на 6 дѣлится только такое число, которое дѣлится на 2 и на 3.**

Напр., число 13854 дѣлится на 6, такъ какъ оно дѣлится на 2 (оканчивается четною цыфрою) и въ то же время дѣлится на 3 (сумма его цыфръ дѣлится на 3). Дѣйствительно: 13854 : 6=2309.

117. Подобнымъ же образомъ*) можно вывести слѣдующіе **признаки дѣлимости на 12, на 18 и на 15:**

на 12 дѣлится только такое число, которое дѣлится на 3 и на 4;

на 18 дѣлится только такое число, которое дѣлится на 2 и на 9;

на 15 дѣлится только такое число, которое дѣлится на 3 и на 5.

118*. Общій признакъ дѣлимости на 7, на 11 и на 13. **Чтобы узнать, дѣлится ли данное число на 7, или на 11, или на 13, зачеркиваютъ въ числѣ три послѣднія цыфры и вычитаютъ изъ оставшагося числа зачеркнутое (или наоборотъ); если остатокъ равенъ 0, или дѣлится на 7, или на 11, или на 13, то и данное число раздѣлится на 7, или на 11, или на 13.**

Предварительно замѣтимъ, что сумма 1000+1 дѣлится и на 7, и на 11, и на 13, въ чемъ можно убѣдиться непосредственно дѣленіемъ. Положимъ, что въ данномъ числѣ всѣхъ тысячъ a, и b будетъ часть его, состоящая изъ сотенъ, десятковъ и единицъ; тогда данное число можно представить: $a \, . \, 1000+b$, что равно $a \, . \, 1001+b-a$. Если $a>b$, то послѣднее выраженіе можно представить такъ:

$$a \, . \, 1001-(a-b),$$

а когда $b>a$, то оно равносильно выраженію:

$$a \, . \, 1001+(b-a)$$

*) Съ небольшимъ измѣненіемъ для числа 15.

И въ первомъ, и во второмъ случаѣ для дѣлимости числа на 7, или на 11, или на 13, необходимо и достаточно, чтобы разность $a-b$, или $b-a$ дѣлилась на 7, или на 11, или на 13, или же равнялась 0, такъ какъ произведеніе $a.\ 1001$ дѣлится всегда и на 7, и на 11, и на 13.

Пусть, напр., требуется узнать, дѣлится ли на 7 число 11673207. Зачеркиваемъ три послѣднія цыфры и изъ оставшагося числа вычитаемъ зачеркнутое:

$$\begin{array}{r} 11673\,\not{2}\not{0}\not{7} \\ -\ 207 \\ \hline 11466 \end{array}$$

Чтобы узнать, дѣлится ли это число на 7, поступаемъ съ нимъ точно такъ же:

$$\begin{array}{r} 11\,\not{4}\not{6}\not{6} \\ -\ 11 \\ \hline 455 \end{array}$$

455 дѣлится на 7; значитъ, и данное число дѣлится на 7.

119*. Признакъ дѣлимости на 37. Чтобы узнать, дѣлится ли данное число на 37, зачеркиваютъ въ числѣ три послѣднія цыфры, и оставшее число складываютъ съ зачеркнутымъ; если полученная сумма дѣлится на 37, то и данное число раздѣлится на 37.

Для доказательства замѣтимъ, что разность 1000—1, т.-е. 999, дѣлится на 37, въ чемъ можно убѣдиться непосредственно. Пусть данное число будетъ $a.\ 1000+b$, гдѣ b есть часть, состоящая изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. Тогда данное число можно представить такъ: $a.\ 999+(b+a)$; такъ какъ произведеніе $a.\ 999$ всегда дѣлится на 37, то дѣлимость даннаго числа на 37 зависитъ лишь отъ суммы $b+a$.

Важная теорема о дѣлимости.

120*. Теорема. Если произведеніе двухъ чиселъ a_1, a_2 дѣлится на третье число p, и одно изъ чиселъ a_1, a_2 не имѣетъ съ p общихъ дѣлителей, кромѣ 1, то другое изъ этихъ чиселъ дѣлится на p.

Пусть a_1 не имѣетъ съ p общихъ дѣлителей, кромѣ 1; требуется доказать, что a_2 дѣлится на p.

Предположимъ сначала, что $a_1>p$. Раздѣлимъ a_1 на p и назовемъ частное и остатокъ отъ этого дѣленія соотвѣтственно q и r. Тогда:

$$a_1=pq+r.$$

Убѣдимся относительно остатка r, что онъ во-1) не равенъ 0 и во-2) не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p, кромѣ 1. Дѣйствительно, если $r=0$, то $a_1=pq$ и тогда a_1 дѣлилось бы на p, и, слѣд., числа a_1 и p имѣли бы общаго дѣлителя, отличнаго отъ 1, что противорѣчитъ условію теоремы. Предположимъ далѣе, что p и r имѣютъ какого-нибудь общаго дѣлителя $t>1$. Тогда a_1 дѣлилось бы на t и, слѣд., a_1 и p имѣли бы общаго дѣлителя $t>1$, что противорѣчитъ условію.

Если r не равенъ 1, то раздѣлимъ p на r; пусть частное и остатокъ отъ этого дѣленія будутъ q_1 и r_1. Тогда:

$$p=rq_1+r_1.$$

Такъ какъ p и r суть числа, не имѣющія общихъ дѣлителей, кромѣ 1, то изъ послѣдняго равенства убѣждаемся, подобно предыдущему, что во-1) r_1 не равно 0 и во-2) r и r_1 не имѣютъ общихъ дѣлителей, кромѣ 1. Если r_1 не равно 1, то раздѣлимъ r на r_1, отчего получимъ остатокъ r_2, не равный нулю и не имѣющій общихъ дѣлителей съ r_1, кромѣ 1. Если r_2 не равенъ 1, то раздѣлимъ r_1 на r_2, и т. д.; тогда получимъ рядъ равенствъ:

$$\begin{aligned} a_1&=pq+r \\ p&=rq_1+r_1 \\ r&=r_1q_2+r_2 \\ r_1&=r_2q_3+r_3 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

изъ которыхъ убѣждаемся, что остатки r, r_1, r_2 и т. д. не равны нулю. Такъ какъ при всякомъ дѣленіи остатокъ долженъ быть меньше дѣлителя, то $r<p$, $r_1<r$, $r_2<r_1$, и т. д. Поэтому, произведя достаточное число дѣленій, мы, наконецъ, дойдемъ до такого остатка, который равенъ 1. Пусть $r_n=1$. Тогда:

$$r_{n-2}=r_{n-1}q_n+1.$$

Умножимъ почленно каждое изъ полученныхъ равенствъ на a_2:

$$a_1a_2=pqa_2+ra_2$$
$$pa_2=rq_1a_2+r_1a_2$$
$$ra_2=r_1q_2a_2+r_2a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$r_{n-2}a_2=r_{n-1}q_na_2+a_2$$

Обращая вниманіе на первое изъ этихъ равенствъ, разсуждаемъ такъ: такъ какъ a_1a_2, по условію, дѣлится на p, то и сумма pqa_2+ra_2 дѣлится на p; первое слагаемое этой суммы дѣлится на p; слѣд., и второе слагаемое т.-е. ra_2 дѣлится на p. Перейдя затѣмъ къ равенству второму, находимъ, что сумма pa_2 и одно изъ слагаемыхъ $(ra_2)q_1$ дѣлится на p; откуда заключаемъ, что и второе слагаемое, r_1a_2, дѣлится на p. Перейдя затѣмъ къ равенству 3-му, отъ 3-го къ 4-му, отъ 4-го къ 5-му и т. д., дойдемъ, наконецъ, до послѣдняго равенства, изъ котораго заключимъ, что a_2 дѣлится на p.

Если $a_1<p$, то мы раздѣлимъ p на a_1, затѣмъ a_1 на остатокъ; послѣ первый остатокъ на второй и т. д.; тогда получимъ такія равенства:

$$p=a_1q+r$$
$$a_1=rq_1+r_1$$
$$r=r_1q_2+r_2, \text{ и т. д.}$$

Къ этимъ равенствамъ, очевидно, можно примѣнить тѣ же разсужденія, какія были изложены выше; значитъ, и въ этомъ случаѣ дойдемъ до заключенія, что a_2 дѣлится на p.

120,a*. Слѣдствіе 1-е. Произведеніе нѣсколькихъ сомножителей: $a_1a_2a_3...a_n$ можетъ дѣлиться на простое число p только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ сомножителей дѣлится на p.

Разсматривая данное произведеніе, какъ произведеніе только 2-хъ сомножителей: a_1 и $(a_2a_3...a_n)$, можемъ разсуждать такъ: если a_1 не дѣлится на простое число p, то это значитъ, что a_1 не имѣетъ съ p общихъ дѣлителей, кромѣ 1; въ такомъ случаѣ, по доказанной теоремѣ, число $a_2a_3...a_n$ должно дѣлиться на p. Подобно этому убѣдимся, что если a_2 не дѣлится

на p, то число $a_3 \ldots a_n$ должно дѣлиться на p. Продолжая эти разсужденія далѣе, найдемъ, что, если ни одно изъ чиселъ: a_1, a_2, $a_3 \ldots a_{n-1}$ не дѣлится на p, то a_n дѣлится на p. Если же какое-нибудь изъ чиселъ: a_1, a_2, $a_3 \ldots a_{n-1}$ дѣлится на p, то теорема не требуетъ доказательства.

120,б*. Слѣдствіе 2-е. Если число a дѣлится порознь на 2 числа p и q, при чемъ p и q не имѣютъ между собою общихъ дѣлителей, кромѣ 1, то a дѣлится на произведеніе pq.

Назовемъ частное отъ дѣленія a на p черезъ Q; тогда:

$$a=pQ \ldots (1).$$

Такъ какъ по условію, a дѣлится на q, то изъ равенства (1) заключаемъ, что pQ дѣлится на q. Но p не имѣетъ съ q общихъ дѣлителей, кромѣ 1; значитъ, согласно теоремѣ, Q должно дѣлиться на q. Пусть частное отъ этого дѣленія будетъ Q_1; тогда:

$$Q=qQ_1 \ldots (2).$$

Вставивъ въ равенство (1) на мѣсто Q равное ему произведеніе, получимъ:

$$a=p(qQ_1)=(pq)Q_1,$$

откуда видно, что число a есть произведеніе двухъ множителей: (pq) и Q_1; значитъ, a дѣлится на pq.

Такимъ образомъ: если число дѣлится на 2 и на 3, то оно дѣлится на 6; если число дѣлится на 3 и на 4, то оно дѣлится на 12; и т. п.

II. Числа простыя и составныя.

121. Опредѣленія *). 1) Число, которое дѣлится только на единицу и на само себя, наз. простымъ (или перво-

*) Опредѣленіемъ наз. предложеніе, въ которомъ высказывается, какой смыслъ придается тому или другому названію; напр., предложеніе: «умноженіе есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ данномъ числѣ находится единицъ», есть опредѣленіе умноженія

начальнымъ); таково, напр., число 7, которое дѣлится только на 1 и на 7.

2) Число, которое дѣлится не только на единицу и на само себя, но еще и на другія числа, наз. составнымъ; таково, напр., число 12, которое дѣлится не только на 1 и на 12, но и на 2, на 3, на 4 и на 6.

Есть 26 простыхъ чиселъ, меньшихъ 100, а именно: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Въ концѣ этой книги приложена таблица, въ которой выписаны всѣ простыя числа, не превосходящія 6000.

122*. Теорема. Всякое составное число дѣлится на нѣкоторое простое число, большее 1.

Пусть N есть какое-нибудь составное число. По опредѣленію, N дѣлится на нѣкоторое число t, большее 1 и меньшее N. Если t есть число простое, то теорема доказана; если же t число составное, то оно, въ свою очередь, дѣлится на нѣкоторое число t_1, большее 1 и меньшее t. Въ такомъ случаѣ и N дѣлится на t_1. Если t_1 есть число простое, то теорема доказана; если же t_1 число составное, то оно дѣлится на t_2, которое больше 1 и меньше t_1. Такимъ образомъ, убѣдимся, что N дѣлится на нѣкоторое простое число t_1, большее 1.

123*. Теорема. Существуетъ безчисленное множество простыхъ чиселъ.

Допустимъ противное, т.-е., что простыхъ чиселъ ограниченное число. Въ такомъ случаѣ должно существовать наибольшее простое число. Пусть такое число будетъ a. Чтобы опровергнуть это допущеніе, вообразимъ новое число N, составленное по формулѣ:

$$N=(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots\ldots a)+1,$$

т.-е. вообразимъ такое число N, которое получится, если перемножимъ всѣ простыя числа отъ 1 до a и къ произведенію приложимъ еще 1. Такъ какъ N, очевидно, больше a, и a, согласно предположенію, есть наибольшее изъ простыхъ чиселъ, то N дол-

жно быть числомъ составнымъ. Но составное число, по доказанному выше, дѣлится на нѣкоторое простое число, бо́льшее 1. Слѣд., N дѣлится на нѣкоторое число изъ ряда: 2, 3, 5, 7., 11..... a. Но этого быть не можетъ, такъ какъ N есть сумма двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое (1.2.3.5... a) дѣлится на всякое число изъ ряда: 2, 3, 5.... a, а второе (1) не дѣлится ни на одно изъ этихъ чиселъ. Значитъ, нельзя допустить, чтобы существовало наибольшее простое число; а если нѣтъ наибольшаго простого числа, то рядъ простыхъ чиселъ безконеченъ.

124*. Составленіе ряда послѣдовательныхъ простыхъ чиселъ. Самый простой способъ составленія ряда послѣдовательныхъ простыхъ чиселъ состоитъ въ томъ, что изъ ряда натуральныхъ чиселъ отъ 1 до a (число, которымъ желаютъ ограничить рядъ) выключаютъ сначала всѣ числа, дѣлящіяся на 2, потомъ всѣ числа, дѣлящіяся на 3, затѣмъ всѣ числа, дѣлящіяся на 5, на 7, на 11 и т. д. Это дѣлается очень просто: выписавъ рядъ нечетныхъ чиселъ отъ 1 до a, зачеркиваютъ въ немъ каждое 3-е число послѣ 3-хъ, каждое 5-е число послѣ 5, каждое 7-е послѣ 7-ми и т. д. Для объясненія этого пріема предположимъ, что желаютъ зачеркнуть всѣ составныя числа, дѣлящіяся на 7. Наименьшее число, дѣлящееся на 7, есть само 7. Но 7 простое число и потому не должно быть зачеркнуто. Такъ какъ нечетныя числа отличаются одно отъ другого на 2, то слѣдующія за 7-ю числа будутъ: 7+2, 7+(2 . 2), 7+ (2.3), 7+(2 . 4) и т. д. Изъ нихъ первое число, дѣлящееся на 7, есть 7+(2 . 7); это будетъ 7-е число послѣ 7. Также только 7-е число, слѣдующее за 7+(2 . 7), будетъ дѣлиться на 7; однимъ словомъ, кратнымъ 7 будетъ каждое 7-е число послѣ 7 и никакое иное.

Описанный пріемъ извѣстенъ подъ именемъ **рѣшета Эратосѳена** (cribrum Eratosthenis). Александрійскій математикъ Эратосѳенъ, жившій въ 3-мъ вѣкѣ до Р. Хр., писалъ числа на дощечкѣ, покрытой воскомъ, и прокалывалъ дырочки надъ тѣми числами, которыя дѣлятся на 2, на 3, на 5 и т. д.; отъ этого дощечка уподоблялась рѣшету, сквозь которое какъ бы просѣивались составныя числа.

Въ настоящее время имѣются таблицы всѣхъ послѣдовательныхъ простыхъ чиселъ, меньшихъ 9 000 000 *).

III. О дѣлителяхъ составного числа.

125. Разложеніе составного числа на простыхъ множителей. **Разложить составное число на простыхъ множителей значитъ представить его въ видѣ произведенія нѣсколькихъ простыхъ чиселъ.** Напр., разложить 12 на простыхъ множителей значитъ представить 12 такъ: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Пусть требуется разложить на простыхъ множителей какое-нибудь составное число, напр., 420. Для этого находимъ, по признакамъ дѣлимости, наименьшее простое число (кромѣ 1), на которое дѣлится 420. Такое число есть 2; раздѣлимъ 420 на 2:

$$420 : 2 = 210;\ \text{откуда:}\ 420 = 210 \cdot 2 \qquad (1).$$

Теперь находимъ наименьшее простое число (кромѣ 1), на которое дѣлится составное число 210. Такое число есть 2; раздѣлимъ 210 на 2:

$$210 : 2 = 105;\ \text{откуда:}\ 210 = 105 \cdot 2.$$

Замѣнимъ въ равенствѣ (1) число 210 равнымъ ему произведеніемъ:

$$420 = 105 \cdot 2 \cdot 2 \qquad (2).$$

Наименьшее простое число, на которое дѣлится составное число 105 (кромѣ 1), есть 3; раздѣлимъ 105 на 3:

$$105 : 3 = 35;\ \text{откуда:}\ 105 = 35 \cdot 3.$$

Замѣнимъ въ равенствѣ (2) число 105 равнымъ ему произведеніемъ:

$$420 = 35 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \qquad (3)$$

---

*) Наибольшее простое число, извѣстное до сего времени, есть $2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$; это число было найдено священникомъ о. Іоанномъ Первушинымъ въ 1883 г.

Наименьшее простое число (кромѣ 1), на которое дѣлится составное число 35, есть 5; раздѣливъ 35 на 5, находимъ 7; значитъ, 35=7 . 5. Замѣнимъ въ равенствѣ (3) число 35 равнымъ ему произведеніемъ 7 . 5, получимъ:

$$420=7 . 5 . 3 . 2 . 2$$

Это и будетъ требуемое разложеніе, такъ какъ всѣ сомножители—числа простыя.

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ множителей, то можно писать ихъ въ какомъ угодно порядкѣ; обыкновенно пишутъ ихъ отъ меньшихъ къ бóльшимъ, т.-е. такъ: 420=2 . 2 . 3 . 5 . 7

126. Какъ располагаютъ разложеніе. Разложеніе на простыхъ множителей располагаютъ на письмѣ обыкновенно такъ:

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

т.-е. пишутъ данное составное число и проводятъ справа отъ него вертикальную черту. Справа отъ черты помѣщаютъ наименьшее простое число, на которое дѣлится данное составное, и дѣлятъ на него это данное число. Цыфры частнаго подписываютъ подъ дѣлимымъ. Съ этимъ частнымъ поступаютъ такъ же, какъ съ даннымъ числомъ. Дѣйствія продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится 1. Тогда всѣ числа, стоящія направо отъ черты, будутъ простыми множителями даннаго числа.

Возьмемъ еще слѣдующій примѣръ:

8874	2
4437	3
1479	3
493	17
29	29
1	

Дойдя до частнаго 493, мы затрудняемся рѣшить, на какое число оно дѣлится. Въ такихъ случаяхъ обращаемся къ таблицѣ простыхъ чиселъ (въ концѣ этой книги). Если въ ней встрѣтится число, поставившее насъ въ затрудненіе, то оно дѣлится только на само себя. 493 не находится въ таблицѣ простыхъ чиселъ; значитъ, это число—составное и потому должно дѣлиться на какое-

нибудь простое число, бо́льшее 1. Пробуемъ дѣлить его на 7, на 11, на 13... и т. д. до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до дѣленія безъ остатка. Оказывается, что 493 дѣлится на 17, при чемъ въ частномъ получается 29. Теперь можемъ окончить разложеніе.

127. Нѣкоторые частные случаи разложенія. Укажемъ 2 случая, въ которыхъ разложеніе упрощается.

1) Если данное составное число не велико, то его множителей прямо выписываютъ въ строку. Напр.:

$$72=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

При этомъ говорятъ такъ: 72 равно 2, умноженнымъ на 36 (2 пишемъ, а 36 запоминаемъ); 36 равно 2, умноженнымъ на 18 (2 пишемъ, а 18 запоминаемъ); 18 равно 2, умноженнымъ на 9; и т. д.

2) Если данное число легко разлагается на какихъ-нибудь составныхъ множителей, то разлагаютъ его сначала на этихъ множителей, а потомъ каждаго изъ нихъ разлагаютъ на простыхъ. Напримѣръ:

$$14000=1000 \cdot 14=10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 14=2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7.$$

Замѣчаніе. Когда въ разложеніи одинъ и тотъ же множитель повторяется нѣсколько разъ, то можно писать сокращенно, употребляя то обозначеніе *степени*, которое мы указали прежде (§ 62). Такъ, вмѣсто строки: $14000=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. пишутъ короче:

$$14000=2^4 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

Здѣсь показатели степени 4 и 3, поставленные надъ числами 2 и 5, означаютъ, сколько разъ эти числа должны быть повторены множителями.

128. Важное свойство разложенія. Всякое составное число разлагается только въ одинъ рядъ простыхъ множителей. Напр., число 14000, какимъ бы спо-

собомъ мы его не разлагали на простыхъ множителей, всегда даетъ такой рядъ, въ которомъ множитель 2 повторяется 4 раза, множитель 5 повторяется 3 раза, а множитель 7 входитъ только одинъ разъ (конечно, множители эти могутъ стоять въ какомъ угодно порядкѣ).

128,a*) Доказательство этого свойства. Допустимъ, что какое-нибудь число N дало два ряда простыхъ множителей:

$$N=abc\ldots \text{ и } N=a_1b_1c_1\ldots$$

(въ обоихъ рядахъ множители могутъ повторяться).

Тогда: $$abc\ldots=a_1b_1c_1\ldots$$

Лѣвая часть послѣдняго равенства дѣлится на a; значитъ, и правая часть должна дѣлиться на a. Но a число простое, поэтому произведеніе $a_1b_1c_1\ldots.$ только тогда раздѣлится на a, когда одинъ изъ его множителей дѣлится на a (§ 120,a); но простое число можетъ дѣлиться на другое простое число, отличное отъ 1, только тогда, когда эти простыя числа одинаковы. Значитъ, одно изъ чиселъ: a_1, b_1, $c_1\ldots.$ равняется a. Пусть $a_1=a$. Раздѣливъ обѣ части равенства на a, получимъ:

$$bc\ldots.=b_1c_1\ldots.$$

Подобно предыдущему, убѣдимся, что одинъ изъ множителей: b_1, $c_1,\ldots.$ равенъ b. Пусть $b_1=b$; тогда $cd\ldots=c_1d_1\ldots$ Продолжая эти разсужденія далѣе, увидимъ, что всѣ множители перваго ряда входятъ также и во второй рядъ. Раздѣливъ обѣ части равенства на a_1, убѣдимся, что въ первомъ ряду есть множитель a_1. Такимъ образомъ, подобно предыдущему, найдемъ, что всѣ множители второго ряда входятъ и въ первый рядъ. Отсюда слѣдуетъ, что оба эти ряда могутъ отличаться только порядкомъ множителей, а не самими множителями,—другими словами, что эти два ряда *представляютъ на самомъ дѣлѣ только одинъ рядъ*.

129. Опредѣленіе. Если одно число дѣлится на другое безъ остатка, то это другое число наз. дѣлителемъ

перваго числа. Напр., 40 дѣлится на 8 безъ остатка: вслѣдствіе этого мы можемъ число 8 назвать дѣлителемъ числа 40.

Всякое простое число, напр., число 11, имѣетъ только двухъ дѣлителей: 1 и само себя.

Всякое составное число имѣетъ болѣе двухъ дѣлителей; напр., число 6 имѣетъ 4-хъ дѣлителей: 1, 2, 3 и 6; изъ нихъ первые три—простые, а послѣдній—составной.

129,а. Нахожденіе дѣлителей. Пусть требуется найти дѣлителей числа 420. Для этого разложимъ это число на простыхъ множителей:

$$420=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 .$$

На каждаго изъ этихъ простыхъ множителей число 420 дѣлится безъ остатка; напр., 420 дѣлится на 5, потому что 420 можно представить въ видѣ произведенія: $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 5=84 \cdot 5$. Значитъ, всѣ простые множители составного числа служатъ также и его простыми дѣлителями.

Чтобы найти составныхъ дѣлителей, примемъ во вниманіе, что множителей произведенія можно соединять въ различныя группы (§ 61). Соединимъ ихъ, положимъ, такъ:

$$420=(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7)=6 \cdot 70.$$

Теперь 420 представляетъ собою произведеніе двухъ множителей: 6 и 70; слѣд., 420 дѣлится и на 6, и на 70. Соединяя множителей въ иныя группы, увидимъ такимъ же образомъ, что 420 дѣлится на произведеніе какихъ угодно своихъ простыхъ множителей.

Правило. Чтобы найти дѣлителей даннаго составного числа, предварительно разлагаютъ его на простыхъ множителей; каждый изъ этихъ множителей будетъ простымъ дѣлителемъ даннаго числа; составные же дѣлители получаются перемноженіемъ простыхъ множителей по два, по три, по четыре и т. д.

130. Замѣчаніе. Чтобы найти частное отъ дѣленія составного числа на какого-нибудь его дѣлителя, достаточно изъ разложенія составного числа выключить тѣхъ множителей, которые входятъ въ дѣлителя, и оставшихся множителей перемножить. Напр., чтобы найти частное отъ дѣленія 420 на 70, изъ разложенія 420=2 2 . 3 . 5 . 7 выбросимъ множителей 2, 5 и 7, произведеніе которыхъ составляетъ 70, и оставшіеся множители 2 и 3 перемножимъ (получимъ 6).

131*. Теорема. Если N есть дѣлитель числа P, то всѣ простые множители, на которые разлагается N, входятъ также и въ разложеніе числа P.

Назвавъ частное отъ дѣленія N на P черезъ Q, получимъ: $N=PQ$. Разложимъ числа P и Q на простыхъ множителей и вставимъ въ равенство $N=PQ$ на мѣсто P и Q ихъ разложенія; тогда мы получимъ разложеніе числа N. Такъ какъ другого разложенія число N не имѣетъ, то заключаемъ, что всѣ простые множители P входятъ въ разложеніе числа N.

Слѣдствіе. Составное число не можетъ имѣть иныхъ дѣлителей, кромѣ тѣхъ, которые получаются по правилу предыдущаго параграфа.

IV. Общій наибольшій дѣлитель.

132. Опредѣленія. 1) Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ нѣсколькихъ чиселъ называется самое большое число, на которое дѣлятся всѣ эти числа.

Напр., общій наибольшій дѣлитель трехъ чиселъ: 18, 30 и 24 есть 6, потому что 6 есть самое большое число, на которое дѣлятся всѣ эти числа.

2) Два числа, для которыхъ общій наибольшій дѣлитель есть 1, наз. взаимно простыми (или первыми между собою). Таковы, напр., числа 14 и 15.

Укажемъ два способа нахожденія общаго наиб. дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ.

Способъ 1-й: посредствомъ разложенія на простыхъ сомножителей.

133. Пусть требуется найти общаго наиб. дѣлителя двухъ чиселъ: 180-и и 126-и. Для этого предварительно разложимъ эти числа на простыхъ множителей:

$$180=2\,.\,2\,.\,3\,.\,3\,.\,5 \qquad 126=2\,.\,3\,.\,3\,.\,7.$$

Сравнивая между собою множителей этихъ чиселъ, замѣчаемъ, что между ними есть общіе, а именно: 2, 3, 3. Каждый изъ этихъ общихъ множителей будетъ и общимъ дѣлителемъ 180-и и 126-и. Чтобы получить составныхъ общихъ дѣлителей, надо перемножить общихъ множителей по два и по три. Наибольшій общій дѣлитель, очевидно, получится, если перемножимъ всѣхъ общихъ множителей:

$$2\,.\,3\,.\,3=18.$$

Пусть еще требуется найти общаго наибольшаго дѣлителя трехъ чиселъ: 210, 1260 и 245. Разложимъ эти числа на простыхъ множителей:

210	2	1260	2	245	5
105	3	630	2	49	7
35	5	315	3	7	7
7	7	105	3		
		35	5		
		7	7.		

Теперь видимъ, что общій наиб. дѣлитель этихъ чиселъ равенъ произведенію общихъ множителей 5 и 7, т.-е равенъ 35.

Правило. **Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ, разлагаютъ эти числа на простыхъ множителей и перемножаютъ между собою тѣхъ изъ этихъ множителей, которые общи всѣмъ числамъ.**

Способъ 2-й: посредствомъ послѣдовательнаго дѣленія.

134. Сначала укажемъ этотъ способъ въ примѣненіи къ двумъ даннымъ числамъ, а потомъ къ тремъ и болѣе.

Въ примѣненіи къ двумъ даннымъ числамъ способъ послѣдовательнаго дѣленія основанъ на слѣдующихъ двухъ истинахъ:

1) **Если бо́льшее изъ двухъ данныхъ чиселъ дѣлится на меньшее, то меньшее изъ нихъ есть общій наибольшій дѣлитель.**

Напр., возьмемъ два числа: 54 и 18, изъ которыхъ бо́льшее дѣлится на меньшее. Такъ какъ 54 дѣлится на 18 и 18 дѣлится на 18, то, значитъ, 18 есть общій дѣлитель чиселъ 54 и 18. Этотъ дѣлитель есть въ то же время и наибольшій, потому что 18 не можетъ дѣлиться ни на какое число, бо́льшее 18.

2) **Если бо́льшее изъ двухъ данныхъ чиселъ не дѣлится на меньшее, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ общему наибольшему дѣлителю другихъ двухъ чиселъ, а именно меньшаго изъ данныхъ чиселъ и остатка отъ дѣленія бо́льшаго изъ нихъ на меньшее.**

Пусть, напр., даны два числа: 85 и 30, изъ которыхъ бо́льшее не дѣлится на меньшее. Раздѣливъ первое на второе, получимъ: 85 : 30=2 (ост. 25), тогда общій наибольшій дѣлитель чиселъ 85 и 30 долженъ быть также общимъ наибольшимъ дѣлителемъ другихъ двухъ чиселъ, а именно: 30 и 25 (это есть 5).

*__Объясненіе.__ Такъ какъ дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное, плюсъ остатокъ, то

$$85=(30 . 2)+25.$$

Теперь число 85 представляется намъ, какъ сумма двухъ слагаемыхъ: одно слагаемое равно произведенію 30 . 2, а другое 25. Замѣтивъ теперь, что если число 30 дѣлится на какія-нибудь

числа, то и произведеніе 30 . 2 (т.-е. сумма 30+30) раздѣлится на эти числа, мы можемъ изъ написаннаго выше равенства вывести такія два заключенія:

1) всѣ общіе дѣлители чиселъ 85 и 30 дѣлятъ сумму (85) и одно слагаемое (30 . 2); значитъ, они должны дѣлить и другое слагаемое (25), такъ какъ если бы другое слагаемое не раздѣлилось, то не раздѣлилась бы и сумма (§ 110, 2);

2) всѣ общіе дѣлители чиселъ 30 и 25 дѣлятъ каждое слагаемое (30 . 2 и 25); поэтому они должны дѣлить и сумму (85).

Значитъ, двѣ пары чиселъ: (85 и 30) и (30 и 25) имѣютъ однихъ и тѣхъ же общихъ дѣлителей; слѣд., у нихъ долженъ быть одинъ и тотъ же общій наибольшій дѣлитель.

```
        391 | 299
        299   1
    299 | 92
    276    3
92 | 23
92    4
 0
```

Посмотримъ теперь, какъ можно пользоваться этими истинами для нахожденія общаго наиб. дѣлителя двухъ чиселъ. Пусть требуется найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 391 и 299. Раздѣлимъ 391 на 299, чтобы узнать, не будетъ ли 299 общимъ наиб. дѣлителемъ (на основаніи истины 1-ой). Видимъ, что 391 не дѣлится на 299, поэтому 299 не есть общій наиб. дѣлитель. На основаніи истины 2-й утверждаемъ, что общій наиб. дѣлитель чиселъ 391 и 299 есть также общій наиб. дѣлитель чиселъ меньшихъ, а именно: 299 и 92. Станемъ искать общаго наиб. дѣлителя этихъ чиселъ. Для этого дѣлимъ 299 на 92, чтобы узнать, не будетъ ли 92 общимъ наиб. дѣлителемъ (истина 1-я). Видимъ, что 92 не есть общій наиб. дѣлитель. Теперь опять, на основаніи истины 2-ой, утверждаемъ, что общій наиб. дѣлитель чиселъ 299 и 92 есть также общій наиб. дѣлитель чиселъ меньшихъ, а именно: 92 и 23. Станемъ искать этого дѣлителя. Для этого дѣлимъ 92 на 23. Видимъ, что 23 есть общій наиб. дѣлитель пары чиселъ 92 и 23, слѣд., и пары чиселъ 299 и 92, слѣд., и пары данныхъ чиселъ 391 и 299.

Правило 1-е. Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, дѣлятъ бо́льшее изъ нихъ на меньшее, потомъ меньшее на первый остатокъ, затѣмъ первый остатокъ на второй, второй на третій и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получится въ остаткѣ 0; тогда послѣдній дѣлитель будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ.

Способъ этотъ (называемый способомъ послѣдовательнаго дѣленія) полезно примѣнять тогда, когда данныя числа не легко разлагаются на простыхъ множителей.

135. Пусть теперь данныхъ чиселъ будетъ болѣе 2-хъ. Напр., положимъ, что требуется найти общаго наиб. дѣлителя трехъ чиселъ: 78, 130 и 195. Для этого найдемъ сначала общаго наиб. дѣлителя какихъ-нибудь двухъ изъ нихъ, напр., 78-ми и 130:

```
      130 | 78
       78   1
    78 | 52
    52   1
 52 | 26
 52   2
  0
```

Общій наиб. дѣлитель этихъ чиселъ оказывается 26.

Теперь отыщемъ общаго наибольшаго дѣлителя 26-и и третьяго даннаго числа 195-и:

```
   195 | 26
   182   7
 26 | 13
 26   2
  0
```

Полученное такимъ образомъ число 13 и есть общій наиб. дѣлитель всѣхъ трехъ данныхъ чиселъ.

Дѣйствительно, число 26, будучи общимъ наиб. дѣлителемъ 130-и и 78-и, должно содержать въ себѣ всѣхъ простыхъ множителей общихъ этимъ числамъ; число 13, будучи общимъ наиб. дѣлителемъ 26-и и 195-и, должно содержать въ себѣ всѣхъ простыхъ множителей, общихъ этихъ числамъ. Слѣд., число 13 содержитъ въ себѣ всѣхъ простыхъ множителей,

общихъ всѣмъ тремъ числамъ: 130, 78 и 195; значитъ 13 есть общій наиб. дѣлитель этихъ чиселъ.

Если бы, кромѣ указанныхъ трехъ чиселъ, имѣлось еще 4-е данное число, то надо было бы такимъ же путемъ найти общаго наиб. дѣлителя 13-и и этого 4-го числа, и т. д.

Правило 2-е. Чтобы найти способомъ послѣдовательнаго дѣленія общаго наиб. дѣлителя нѣсколькихъ чиселъ, находятъ сначала общаго наиб. дѣлителя какихъ-нибудь двухъ изъ нихъ, затѣмъ — общаго наиб. дѣлителя найденнаго дѣлителя и какого-нибудь третьяго даннаго числа, далѣе—общаго наиб. дѣлителя послѣдняго дѣлителя и четвертаго даннаго числа, и т д.

V. Наименьшее кратное число.

136. Опредѣленія. 1) Кратнымъ числомъ даннаго числа наз. всякое число, которое дѣлится на данное безъ остатка.

Такъ, для числа 9 кратными числами будутъ: 9, 18, 27, 36 и т. д. Для каждаго даннаго числа можно найти безчисленное множество кратныхъ чиселъ; стоитъ только данное число умножить на 1, на 2, на 3, на 4 и т. д.

2) Общимъ наименьшимъ кратнымъ (или просто наименьшимъ кратнымъ) числомъ нѣсколькихъ чиселъ называется самое меньшее число, которое дѣлится на каждое изъ этихъ чиселъ.

Такъ, для трехъ чиселъ: 6, 15 и 20 общее наименьшее кратное есть 60, такъ какъ меньше 60-и никакое число не дѣлится на 6, на 15 и на 20, а 60 дѣлится на эти числа.

Укажемъ два способа для нахожденія наименьшаго кратнаго нѣсколькихъ данныхъ чиселъ.

136,a. Способъ 1-й: посредствомъ разложенія на простыхъ сомножителей. Пусть требуется найти наименьшее кратное чиселъ: 100, 40 и 35. Для этого разложимъ каждое изъ этихъ чиселъ на простыхъ множителей:

100=2 . 2 . 5 . 5;   40=2 . 2 . 2 . 5;   35=5 . 7.

Чтобы какое-нибудь число дѣлилось на 100, на 40 и на 35, необходимо, чтобы въ него входили всѣ простые множители этихъ дѣлителей. Выпишемъ всѣхъ множителей числа 100 и добавимъ къ нимъ тѣхъ множителей числа 40, которыхъ недостаетъ въ разложеніи 100. Тогда получимъ произведеніе 2 . 2 . 5 . 5 . 2, которое дѣлится и на 100, и на 40. Добавимъ теперь къ этому произведенію тѣхъ множителей числа 35, которыхъ въ произведеніи недостаетъ. Тогда получимъ произведеніе:

2 . 2 . 5 . 5 . 2 . 7=1400,

дѣлящееся и на 100, и на 40, и на 35. Это и есть наименьшее кратное число, потому что, выключивъ изъ него хотя бы одного сомножителя, мы получимъ число, которое не раздѣлится на какое-нибудь изъ данныхъ чиселъ.

Правило. Чтобы найти наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ, разлагаютъ всѣ эти числа на простыхъ множителей; затѣмъ, взявъ одно изъ нихъ, приписываютъ къ нему недостающихъ простыхъ множителей изъ другого числа; къ этому произведенію приписываютъ недостающихъ простыхъ множителей изъ третьяго числа, и т. д.

Замѣчаніе. Найдя наименьшее общее кратное и помноживъ его на какое-угодно число, мы получимъ тоже общее кратное, но не наименьшее. Напр., для чиселъ 100, 40 и 35 общими кратными, помимо 1400, будутъ:

1400 . 2=2800; 1400 . 3=4200; 1400 . 4=5600 и т. д.

137. Нѣкоторые особые случаи. Разсмотримъ два случая, въ которыхъ наименьшее кратное можетъ быть найдено весьма просто.

Случай 1-й, когда никакая пара данныхъ чиселъ не имѣетъ общихъ множителей. Пусть, напр., даны три числа: 20, 49, 33, изъ которыхъ, какъ видно изъ разложеній:

$$20=2\,.\,2\,.\,5;\quad 49=7\,.\,7;\quad 33=3\,.\,11,$$

никакая пара не имѣетъ общихъ множителей. Примѣняя къ этому случаю общее правило, мы придемъ къ заключенію, что всѣ данныя числа надо перемножить:

$$20\,.\,49\,.\,33=32340.$$

Такъ же надо поступить, когда отыскивается наименьшее кратное простыхъ чиселъ; напр., наим. кратное чиселъ 3, 7 и 11 равно: 3 . 7 . 11=231.

Случай 2-й, когда бо́льшее изъ данныхъ чиселъ дѣлится на всѣ остальныя. Тогда наибольшее число и есть наим. кратное. Пусть, напр., даны четыре числа: 5, 12, 15 и 60, изъ которыхъ бо́льшее 60 дѣлится на 5, на 12 и на 15; такъ какъ оно при этомъ, конечно, дѣлится и на само себя, то оно и есть наименьшее кратное.

138. Способъ 2-й: посредствомъ нахожденія общаго наиб. дѣлителя. Пусть требуется найти наим. кратное двухъ чиселъ: 391 и 299. Находимъ (послѣдовательнымъ дѣленіемъ) ихъ общаго наиб. дѣлителя; онъ равенъ 23 (см. стр. 117). Теперь раздѣлимъ какое-нибудь изъ данныхъ чиселъ, напр., 299, на 23; получимъ 13. Умножимъ на 13 другое данное число, т.-е. 391; получимъ 5083. Это и есть наим. кратное чиселъ 391 и 299.

Дѣйствительно, частное 299 : 23 должно содержать въ себѣ всѣхъ тѣхъ простыхъ множителей числа 299-и, которые не входятъ въ 391; поэтому произведеніе этого частнаго

на 391 должно содержать въ себѣ всѣхъ простыхъ множителей числа 391 и еще тѣхъ простыхъ множителей числа 299, которые не входятъ въ составъ числа 391, а это, какъ мы знаемъ, и должно составить наим. кратное чиселъ 391 и 299.

Правило 1-е. **Чтобы найти наименьшее кратное двухъ чиселъ, находятъ ихъ общаго наибольшаго дѣлителя, дѣлятъ на него одно изъ чиселъ и на полученное частное умножаютъ другое число.**

Пусть теперь требуется найти наим. кратное трехъ чиселъ: 391, 299 и 85. Находимъ сначала наим. кратное какихъ-нибудь двухъ изъ нихъ, напр., 391 и 299. Это будетъ, какъ мы видѣли, 5083. Теперь находимъ наим. кратное числа 5083 и третьяго даннаго числа 85. Общій наиб. дѣлитель этихъ чиселъ (найденный способомъ послѣдовательнаго дѣленія) есть 17. Частное 85 : 17 равно 5; произведеніе 5083.5 составляетъ 25415. Это и будетъ наим. кратное трехъ данныхъ чиселъ.

Правило 2-е. **Чтобы найти наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ, сначала находятъ наим. кратное какихъ-нибудь двухъ изъ нихъ, потомъ—наим. кратное этого наим. кратнаго и какого-нибудь третьяго даннаго числа, затѣмъ—наим. кратное этого наим. кратнаго и четвертаго даннаго числа, и т. д.**

Способъ этотъ примѣняютъ тогда, когда данныя числа не легко разлагаются на простыхъ множителей.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Обыкновенныя дроби.

1. Основныя понятія.

139. Доли единицы. Если какую-нибудь единицу, напр., аршинъ, раздѣлимъ на нѣсколько равныхъ частей, то каждая часть получаетъ названіе, указывающее, сколько такихъ частей содержится въ цѣлой единицѣ. Такъ, когда единица раздѣлена на 12 равныхъ частей, то каждая часть называется двѣнадцатою частью; раздѣливъ единицу на 40 равныхъ частей, получимъ сороковыя части; и т. п.

Вторая часть называется иначе **половиной**, третья часть—**третью**, четвертая часть—**четвертью**.

Части единицы, получаемыя отъ дѣленія ея на нѣсколько равныхъ частей, обыкновенно называются **долями** единицы.

140. Дробное число. Одна доля или собраніе нѣсколькихъ одинаковыхъ долей единицы называется дробью.

Напр.: 1 десятая, 3 пятыхъ, 12 седьмыхъ суть дроби.

Цѣлое число вмѣстѣ съ дробью составляетъ смѣшанное число; напр., 3 цѣлыхъ 7 восьмыхъ.

Дроби и смѣшанныя числа называются **дробными числами** въ отличіе отъ **цѣлыхъ** чиселъ, составленныхъ изъ цѣлыхъ единицъ.

141. Изображеніе дробнаго числа. Принято изображать дробь такъ: пишутъ число, показывающее,

сколько долей содержится въ дроби; подъ нимъ проводятъ черту, горизонтальную или наклонную; подъ чертою ставятъ другое число, показывающее, на сколько равныхъ частей раздѣлена единица, отъ которой взята дробь. Напр., дроби 3 пятыхъ и 1 восьмая изображаются такъ:

$$\frac{3}{5} \text{ или } {}^{3}/_{5}; \quad \frac{1}{8} \text{ или } {}^{1}/_{8}.$$

Число, стоящее надъ чертою, называется **числителемъ**; оно показываетъ число долей, изъ которыхъ составлена дробь. Число, стоящее подъ чертою, называется **знаменателемъ**; оно означаетъ, на сколько равныхъ частей была раздѣлена единица. Оба эти числа вмѣстѣ называются **членами дроби**.

Смѣшанное число изображаютъ такъ: пишутъ цѣлое число и къ нему, съ правой стороны, приписываютъ дробь; напр., число три и двѣ седьмыхъ изображается такъ: $3\frac{2}{7}$, или $3^{2}/_{7}$.

142. Полученіе дробныхъ чиселъ при измѣреніи. Положимъ, мы желаемъ измѣрить какую-нибудь длину помощью вершка; допустимъ, что вершокъ въ этой длинѣ укладывается 7 разъ, при чемъ получается остатокъ, меньшій вершка. Чтобы измѣрить этотъ остатокъ, подыскиваемъ такую долю вершка, которая, если возможно, уложилась бы въ остаткѣ безъ новаго остатка. Пусть окажется, что восьмая доля вершка укладывается въ остаткѣ ровно 5 разъ. Тогда говоримъ, что измѣряемая длина равна $7^{5}/_{8}$ вершка.

Подобно этому, дробныя числа могутъ получаться при измѣреніи вѣса (напр., $2^{1}/_{4}$ зол.), при измѣреніи времени (напр., $^{7}/_{10}$ часа), и т. п.

Такимъ образомъ, всякое дробное число (равно какъ и всякое цѣлое) можно разсматривать, какъ **результатъ измѣренія**.

Число (цѣлое или дробное) наз. **именованнымъ**, если оно сопровождается названіемъ той единицы, которая употреблялась при измѣреніи, или доли которой употреблялись при измѣреніи, напр., $^3/_4$ вершка; въ противномъ случаѣ число наз. **отвлеченнымъ**, напр. $^3/_4$.

143. Полученіе дробныхъ чиселъ при разложеніи цѣлаго числа на равныя части. Пусть требуется раздѣлить 5 яблокъ на 8 равныхъ частей, напр., требуется распредѣлить ихъ между 8 учениками поровну. Мы можемъ выполнить это распредѣленіе такъ: разрѣжемъ одно яблоко на 8 равныхъ частей и дадимъ каждому ученику по одной части; затѣмъ сдѣлаемъ то же самое со вторымъ яблокомъ, третьимъ и т. д. Тогда каждый ученикъ получитъ по 5 восьмыхъ яблока. Значитъ, восьмая часть 5-и яблокъ равна $^5/_8$ яблока и вообще восьмая часть 5 какихъ-нибудь единицъ равна $^5/_8$ одной единицы.

Возьмемъ еще другой примѣръ: пусть требуется уменьшить въ 5 разъ число 28, т.-е. требуется вмѣсто 28-и взять пятую часть 28-и. Найти пятую часть 28-и мы можемъ такъ: пятая часть одной единицы есть $^1/_5$; пятая часть другой единицы есть также $^1/_5$; если такимъ образомъ возьмемъ по пятой части отъ каждой изъ 28 единицъ, то получимъ $^{28}/_5$.

Правило. Чтобы уменьшить цѣлое число въ нѣсколько разъ, достаточно взять это число числителемъ дроби, а знаменателемъ написать другое число, показывающее, во сколько разъ уменьшается цѣлое число.

144. Равенство и неравенство дробныхъ чиселъ. Два дробныя числа считаются равными, если значенія величины, выражаемыя этими числами, при одной и той же единицѣ измѣренія, равны между собою. Такъ, мы говоримъ, что $^3/_4={}^6/_8$; этимъ мы хотимъ сказать, напр., что двѣ длины, изъ которыхъ одна составляетъ $^3/_4$ аршина,

а другая—$^6/_8$ аршина, равны между собой; или что два вѣса, изъ которыхъ одинъ равенъ $^3/_4$ фунта, а другой $^6/_8$ фунта, равны между собою, и т. п.

Изъ двухъ неравныхъ чиселъ бо́льшимъ считается то, которое выражаетъ бо́льшее значенiе величины при одной и той же единицѣ измѣренiя. Такъ, если мы говоримъ, что $^1/_5 > ^1/_8$, мы желаемъ этимъ выразить, что, напр., $^1/_5$ фунта больше $^1/_8$ фунта, $^1/_5$ часа больше $^1/_8$ часа, и т. п.

145. Дробь правильная и неправильная. Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, наз. **правильною**; дробь, у которой числитель больше знаменателя или равенъ ему, наз. **неправильною**. Очевидно, правильная дробь меньше 1, а неправильная больше ея или равна ей; напр., $^7/_8 < 1$, $^8/_8 = 1$, $^9/_8 > 1$.

146. Обращенiе цѣлаго числа въ неправильную дробь. Всякое цѣлое число можно выразить въ какихъ угодно доляхъ единицы. Пусть, напр., требуется выразить 8 въ двадцатыхъ доляхъ. Въ одной единицѣ заключается 20 двадцатыхъ; слѣд., въ 8 единицахъ ихъ будетъ 20×8, т.-е. 160. Значитъ:

$$8=\frac{20.8}{20}=\frac{160}{20}.$$

Подобнымъ образомъ, число 25 въ четвертыхъ доляхъ выразится $\frac{100}{4}$, число 100 въ семнадцатыхъ доляхъ выразится $\frac{1700}{17}$, и т. п.

Правило. Чтобы обратить цѣлое число въ неправильную дробь съ даннымъ знаменателемъ, умножаютъ это цѣлое число на знаменателя и полученное произведенiе берутъ числителемъ искомой дроби, а знаменателемъ пишутъ даннаго знаменателя.

Замѣчаніе. Цѣлое число иногда бываетъ полезно изобразить въ видѣ такой дроби, у которой числитель равенъ этому цѣлому числу, а знаменатель есть 1. Такъ вмѣсто 5 пишутъ иногда $^5/_1$. Чтобы придать смыслъ такимъ выраженіямъ, условливаются, что раздѣлить единицу на одну равную часть значитъ оставить единицу безъ измѣненія.

147. Обращеніе смѣшаннаго числа въ неправильную дробь. Пусть требуется обратить смѣшанное число $8^3/_5$ въ неправильную дробь. Это значитъ: узнать, сколько пятыхъ долей заключается въ 8 цѣлыхъ единицахъ вмѣстѣ съ 3-мя пятыми долями той же единицы. Въ 8 единицахъ пятыхъ долей содержится 5×8, т.-е. 40; значитъ, въ 8 ед. вмѣстѣ съ 3-мя пятыми ихъ будетъ $40+3$, т.-е. 43. Итакъ, $8^3/_5={}^{43}/_5$. Подобно этому:

$$3\frac{7}{8}=\frac{8\,.\,3+7}{8}=\frac{31}{8};\quad 10\frac{1}{4}=\frac{4\,.\,10+1}{4}=\frac{41}{4};$$

$$25\frac{2}{7}=\frac{25\,.\,7+2}{7}=\frac{177}{7}.$$

Правило. Чтобы обратить смѣшанное число въ неправильную дробь, умножаютъ цѣлое число на знаменателя и къ произведенію прибавляютъ числителя; полученное отъ этого число берутъ числителемъ искомой дроби, а знаменателя оставляютъ прежняго.

148. Обращеніе неправильной дроби въ смѣшанное (или въ цѣлое) число. Пусть требуется обратить неправильную дробь $^{100}/_8$ въ смѣшанное число, или, какъ говорятъ иногда, пусть требуется изъ неправильной дроби $^{100}/_8$ исключить цѣлое число. Это значитъ: узнать, сколько въ этой неправильной дроби заключается цѣлыхъ единицъ и сколько еще восьмыхъ долей, не составляющихъ единицы. Такъ какъ единица заключаетъ въ себѣ 8 восьмыхъ, то въ 100 восьмыхъ содер-

жится столько единицъ, сколько разъ 8 восьмыхъ содержатся въ 100 восьмыхъ. 8 восьмыхъ въ 100 восьмыхъ содержатся 12 разъ, при чемъ 4 восьмыхъ остаются. Значитъ, 100 восьмыхъ содержатъ 12 цѣлыхъ единицъ и еще 4 восьмыхъ доли. Итакъ:

$$\frac{100}{8} = 12\frac{4}{8}.$$

Подобно этому: $\frac{59}{8} = 7\frac{3}{8}$; $\frac{314}{25} = 12\frac{14}{25}$; $\frac{85}{17} = 5$; $\frac{25}{25} = 1$.

Правило. **Чтобы обратить неправильную дробь въ смѣшанное (или въ цѣлое) число, дѣлятъ числителя на знаменателя; цѣлое частное отъ этого дѣленія означаетъ, сколько единицъ въ дроби, а остатокъ—сколько долей единицы.**

II. Измѣненіе величины дроби съ измѣненіемъ ея членовъ.

149. Сравненіе дробей, у которыхъ знаменатели или числители одинаковы. **Изъ двухъ дробей съ одинаковыми знаменателями та больше, у которой числитель больше.** Напр., $^5/_9 > ^4/_9$, потому что обѣ эти дроби составлены изъ одинаковыхъ долей, но число ихъ въ первой дроби больше, чѣмъ во второй.

Изъ двухъ дробей съ одинаковыми числителями та больше, у которой знаменатель меньше. Напр., $^5/_8 > ^5/_{10}$, потому что обѣ дроби имѣютъ одинаковое число долей, но доли въ первой дроби крупнѣе, чѣмъ во второй.

150. Увеличеніе или уменьшеніе одного члена дроби. **Если числителя дроби увеличимъ (или уменьшимъ) въ нѣсколько разъ, то дробь увеличится (или уменьшится) во столько же разъ.** Напр., увеличимъ числителя дроби $^4/_{10}$ въ 3 раза; получимъ $^{12}/_{10}$. Эта дробь

больше прежней въ 3 раза, потому что число долей въ ней больше прежняго въ 3 раза, а доли остались тѣ же.

Если знаменателя дроби увеличимъ (или уменьшимъ) въ нѣсколько разъ, то дробь уменьшится (или увеличится) во столько же разъ. Напр., увеличимъ знаменателя дроби $^4/_{10}$ въ 5 разъ, получимъ $^4/_{50}$. Эта дробь меньше прежней въ 5 разъ, потому что въ ней число долей осталось прежнее, но доли сдѣлались мельче прежнихъ въ 5 разъ.

151. Увеличенie или уменьшенie дроби въ нѣсколько разъ. Зная, какъ измѣняется дробь съ измѣненiемъ ея числителя и знаменателя, мы можемъ вывести слѣдующiя **правила**:

1) **Чтобы увеличить дробь въ нѣсколько разъ, достаточно увеличить во столько же разъ ея числителя или уменьшить во столько же разъ ея знаменателя.**

2) **Чтобы уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, достаточно уменьшить во столько же разъ ея числителя или увеличить во столько же разъ ея знаменателя.**

Примѣры.

Увеличить $^7/_{12}$ въ 5 разъ; получимъ $^{35}/_{12}$.
Увеличить $^7/_{12}$ въ 6 разъ; „ $^{42}/_{12}$ или $^7/_2$.
Уменьшить $^8/_9$ въ 7 разъ; „ $^8/_{63}$
Уменьшить $^8/_9$ въ 4 раза; „ $^8/_{36}$ или $^2/_9$.

152. Увеличенie или уменьшенie обоихъ членовъ дроби. Если числителя и знаменателя дроби увеличимъ (или уменьшимъ) въ одинаковое число разъ, то величина дроби не измѣнится. Напр., уменьшивъ оба члена дроби $^4/_{10}$ въ 2 раза, мы получимъ новую дробь $^2/_5$. Эта дробь равна прежней, потому что если мы уменьшимъ только одного числителя въ два раза, то дробь уменьшится въ 2 раза; если же затѣмъ уменьшимъ еще и знаменателя въ 2 раза, то эта уменьшенная въ 2 раза дробь увеличится вдвое и, слѣд., сдѣлается равной прежней дроби.

153* От прибавленія къ членамъ дроби одного и того же числа дробь, меньшая 1, увеличивается, а дробь, бо́льшая 1, уменьшается, при чемъ та и другая приближаются къ 1.

Напр., прибавимъ къ членамъ правильной дроби $^5/_7$ по 3; получимъ $^8/_{10}$. Первая дробь меньше 1 на двѣ седьмыхъ, а вторая меньше 1 тоже на двѣ, но не седьмыхъ, а десятыхъ. Но $^2/_{10} < ^2/_7$; значитъ, вторая дробь ближе къ 1, чѣмъ первая, и потому $^8/_{10} > ^5/_7$. Возьмемъ теперь неправильную дробь, бо́льшую 1, напр., $^8/_5$, и прибавимъ къ ея членамъ по какому-нибудь числу, напр., по 4; тогда получимъ $^{12}/_9$. Первая дробь больше 1 на 3 пятыхъ, а вторая больше 1 тоже на 3, но не пятыхъ, а девятыхъ; но $^3/_9 < ^3/_5$; значитъ, вторая дробь ближе къ 1, чѣмъ первая, и потому $^{12}/_9 < ^8/_5$.

III. Сокращеніе дробей.

154. Опредѣленіе **Сокращеніемъ дроби называется приведеніе ея къ болѣе простому виду посредствомъ раздѣленія числителя и знаменателя на одно и то же число** (отъ чего, какъ мы видѣли, величина дроби не измѣняется).

Конечно, сократить можно только такую дробь, у которой члены имѣютъ какого-нибудь общаго дѣлителя, кромѣ 1: напр., дробь $^8/_{12}$ можно, а дробь $^9/_{20}$ нельзя, сократить, такъ какъ у первой дроби числитель и знаменатель имѣютъ общаго дѣлителя помимо 1, именно 4, а числитель и знаменатель второй дроби не имѣютъ никакого общаго дѣлителя, помимо 1.

Дробь, которая не можетъ быть сокращена, наз. **несократимою.**

155. Два способа сокращенія. Первый способъ (п о с л ѣ д о в а т е л ь н о е   с о к р а щ е н і е) состоитъ въ томъ, что, руководствуясь признаками дѣли-

мости, опредѣляютъ, не дѣлятся ли числитель и знаменатель данной дроби на какого-нибудь общаго дѣлителя (кромѣ 1); если такой дѣлитель существуетъ, то на него дробь сокращаютъ: полученную послѣ сокращенія дробь, если можно, сокращаютъ такимъ же путемъ снова; продолжаютъ такое послѣдовательное сокращеніе до тѣхъ поръ, пока не получится дробь несократимая. Напр.:

$$\frac{\overset{10}{840}}{3600}=\frac{\overset{4}{84}}{360}=\frac{\overset{3}{21}}{90}=\frac{7}{30}.$$

Для памяти надписываютъ надъ дробью то число, на которое сокращаютъ.

Второй способъ (полное сокращеніе) употребляется тогда, когда по признакамъ дѣлимости нельзя или затруднительно опредѣлить, сократима ли дробь, или нѣтъ. Тогда отыскиваютъ (способомъ послѣдовательнаго дѣленія) общаго наибольшаго дѣлителя членовъ дроби и, если такой окажется не 1, дѣлятъ на него эти члены. Напр., пусть требуется сократить $^{391}/_{527}$. Для этого находимъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 391 и 527 (онъ равенъ 17) и на него сокращаемъ:

$$\frac{391}{527}=\frac{391:17}{527:17}=\frac{23}{31}.$$

Въ этомъ случаѣ послѣ сокращенія получается дробь несократимая. Дѣйствительно, общій наиб. дѣлитель членовъ дроби долженъ содержать въ себѣ всѣхъ общихъ простыхъ множителей, входящихъ въ составъ этихъ членовъ; поэтому когда на него раздѣлимъ числителя и знаменателя, то полученныя частныя уже не могутъ содержать въ себѣ никакихъ общихъ множителей (кромѣ 1), и, слѣд., не будутъ имѣть никакихъ общихъ дѣлителей.

156*. Теорема. Если двѣ дроби равны и одна изъ нихъ несократима, то члены другой дроби должны быть въ одинаковое

число разъ кратны со твѣтствующихъ членовъ несократимой дроби. Положимъ, что

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1},$$

при чемъ допустимъ, что первая дробь несократима, т.-е. что члены ея a и b не имѣютъ общихъ дѣлителей, кромѣ 1. Требуется доказать, что a_1 кратно a и b_1 кратно b и притомъ въ одинаковое число разъ. Для доказательства умножимъ оба члена второй дроби на b, а первой—на b_1; такъ какъ величины дробей отъ этого не измѣнятся, то получимъ равенство:

$$\frac{ab_1}{bb_1}=\frac{a_1b}{b_1b}; \text{ откуда: } ab_1=a_1b \qquad (1).$$

Лѣвая часть этого равенства дѣлится на a; значитъ, его правая часть тоже дѣлится на a; но b, по условію, есть число, взаимно простое съ a; значитъ, надо, чтобы a_1 дѣлилось на a (§ 120). Обозначивъ частное отъ дѣленія a_1 на a буквой m, можемъ положить: $a_1=am$, послѣ чего равенство (1) даетъ:

$$ab_1=amb$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на a, получимъ $b_1=mb$. Итакъ: $a_1=am$ и $b_1=bm$; а это значитъ, что a_1 и b_1 въ одинаковое число разъ кратны соотвѣтственно a и b.

Слѣдствіе. Двѣ несократимыя дроби равны только тогда, когда у нихъ равны числители и равны знаменатели.

IV. Приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю.

157. Объясненіе. Основываясь на томъ, что дробь не измѣнитъ своей величины, если оба ея члена умножимъ на одно и то же число, мы всегда можемъ выразить данныя дроби въ одинаковыхъ доляхъ единицы или, какъ говорятъ, привести ихъ къ общему знаменателю

Укажемъ способъ, посредствомъ котораго можно приводить дроби не только къ общему, но притомъ и къ наименьшему - знаменателю.

Возьмемъ для примѣра двѣ дроби: $^5/_{12}$ и $^7/_{15}$ и зададимся вопросомъ, нельзя ли эти дроби выразить въ одинаковыхъ доляхъ единицы? Дробь $^5/_{12}$—несократима; поэтому, кромѣ 12-хъ долей, ее можно выразить въ доляхъ 24-хъ, 36-хъ, 48-хъ и т. д.; другими словами, знаменатели всѣхъ дробей, которымъ можетъ равняться дробь $^5/_{12}$, должны быть числами, кратными 12-ти *); подобно этому, знаменатели всѣхъ дробей, которымъ можетъ равняться несократимая дробь $^7/_{15}$, должны быть числами, кратными 15-ти; слѣд., общій знаменатель этихъ двухъ дробей долженъ быть общимъ кратнымъ числомъ 12-ти и 15-ти, а наименьшій общій знаменатель долженъ быть наименьшимъ кратнымъ числомъ 12-ти и 15-ти. Найдемъ наименьшее кратное этихъ чиселъ:

$$\begin{array}{l} 12=2\,.\,2\,.\,3 \\ \underline{15=3\,.\,5} \\ \text{н. кр.} =2\,.\,2\,.\,3\,.\,5=60. \end{array}$$

Это и будетъ наим. общій знаменатель дробей $^5/_{12}$ и $^7/_{15}$.

Чтобы выразить каждую изъ этихъ дробей въ 60-хъ доляхъ, найдемъ для ихъ знаменателей такъ называемыхъ **дополнительныхъ множителей,** т.-е. для каждаго знаменателя найдемъ то число, на которое его надо умножить, чтобы получить наим. кратное. Сравнивая между собою разложенія 12-ти, 15-ти и 60-ти, находимъ, что для полученія 60-ти надо умножить 12 на 5, а 15 на 2 . 2, т.-е. на 4. Чтобы не измѣнились величины дробей, надо умножить числителя каждой дроби на то же число, на которое умножаемъ ея знаменателя:

$$\frac{5}{12}=\frac{5\,.\,5}{12\,.\,5}=\frac{25}{60} \qquad \frac{7}{15}=\frac{7\,.\,4}{15\,.\,4}=\frac{28}{60}.$$

*) Доказательствомъ этого утвержденія служитъ теорема § 156.

Пусть еще требуется привести къ наименьшему общему знаменателю три дроби: $^4/_{90}$ $^7/_{20}$ и $^8/_{75}$. Первая изъ нихъ—сократимая дробь; послѣ сокращенія она даетъ $^2/_{45}$. остальныя дроби—несократимыя. Отыщемъ наименьшее кратное знаменателей 45, 20 и 75:

45=3 . 3 . 5	доп. мн. для 45=2 . 2 . 5=20
20=2 . 2 . 5	,, ,, ,, 20=3 . 3 . 5=45
75=3 . 5 . 5	,, ,, ,, 75=2 . 2 . 3=12

н. кр. =3 . 3 . 5 . 2 . 2 . 5=900.

Теперь умножимъ оба члена каждой дроби на дополнительнаго множителя для ея знаменателя:

$$\frac{2}{45}=\frac{2 \cdot 20}{45 \cdot 20}=\frac{40}{900};\ \frac{7}{20}=\frac{7 \cdot 45}{20 \cdot 45}=\frac{315}{900};\ \frac{8}{75}=\frac{8 \cdot 12}{75 \cdot 12}=\frac{96}{900}.$$

Правило. **Чтобы привести дроби къ наименьшему общему знаменателю, предварительно, если можно, ихъ сокращаютъ, затѣмъ находятъ наименьшее кратное всѣхъ знаменателей и, наконецъ, умножаютъ оба члена каждой дроби на дополнительнаго множителя для ея знаменателя.**

158. Нѣкоторые особые случаи. *Случай 1-й, когда никакая пара знаменателей не содержитъ общихъ множителей.* Напр. $^3/_7$ $^4/_{15}$ $^5/_8$. Въ этомъ случаѣ наим. кратное знаменателей равно произведенію ихъ: 7.15.8. Слѣд., оба члена первой дроби придется умножить на 15.8=120, второй—на 7.8=56 и третьей—на 7.15=105:

$$\frac{3}{7}=\frac{3 \cdot 120}{7 \cdot 120}=\frac{360}{840};\ \frac{4}{15}=\frac{4 \cdot 56}{15 \cdot 56}=\frac{224}{840};\ \frac{5}{8}=\frac{5 \cdot 105}{8 \cdot 105}=\frac{525}{840}.$$

Правило. **Чтобы привести къ наименьшему общему знаменателю такія несократимыя дроби, у которыхъ никакая пара знаменателей не содержитъ общихъ множителей, умножаютъ оба члена каждой дроби на произведеніе знаменателей всѣхъ остальныхъ дробей.**

Такъ же поступаютъ, когда знаменатели—числа простыя.

Случай 2-й, когда наибольшій изъ знаменателей дѣлится на каждаго изъ остальныхъ, напр., $^3/_7$, $^7/_{15}$ $^8/_{315}$. Знаменатель 315 дѣлится на 7, на 15 и на самого себя. Въ этомъ случаѣ **наибольшій знаменатель** есть наименьшее кратное всѣхъ знаменателей; значитъ, онъ **долженъ быть общимъ знаменателемъ:**

доп. мн. для 7=45; доп. мн. для 15=21.

$$\frac{3}{7}=\frac{3.45}{7.45}=\frac{135}{315};\quad \frac{7}{15}=\frac{7.21}{15.21}=\frac{147}{315};\ \frac{8}{315}=\frac{8}{315}.$$

158,a. Замѣчаніе. Приведеніе дробей къ общему знаменателю облегчаетъ сравненіе ихъ по величинѣ. Пусть, напр., требуется узнать, равны или не равны дроби $^5/_7$ и $^9/_{13}$, и если не равны, то которая изъ нихъ больше. Для этого приведемъ ихъ къ общему знаменателю:

$$\frac{5}{7}=\frac{5.13}{7.13}=\frac{65}{91};\ \frac{9}{13}=\frac{9.7}{13.7}=\frac{63}{91}.$$

Теперь сразу видно, что данныя дроби не равны, а именно первая дробь больше второй.

V. Нахожденіе дроби даннаго числа и обратный вопросъ.

159. Нахожденіе дроби даннаго числа. Умѣя увеличивать и уменьшать число въ нѣсколько разъ, мы легко можемъ находить любую дробь даннаго числа*).

*) Нахожденіе дроби даннаго числа представляетъ собою умноженіе на отвлеченную дробь, а нахожденіе неизвѣстнаго числа по данной величинѣ его дроби есть дѣленіе на отвлеченную дробь. Поэтому содержаніе этой главы можно было бы отнести къ умноженію и дѣленію дробей. Такъ бы оно и слѣ-

Примѣръ 1-й. Найти $^3/_4$ числа 26-ти.

Для этого сначала найдемъ $^1/_4$ числа 26-ти (т.-е. уменьшимъ 26 въ 4 раза), и потомъ полученную четверть увеличимъ въ 3 раза:

$$\frac{1}{4} \text{ числа 26-ти составляетъ } \frac{26}{4} \qquad (\S\ 143),$$

$$\text{слѣд., } \frac{3}{4} \text{ числа 26-ти составляютъ } \frac{26 \cdot 3}{4} = \frac{78}{4} = 19\frac{1}{2} \ (\S\ 151,1).$$

Примѣръ 2-й. Найти $^8/_3$ числа $^5/_6$.

Для этого найдемъ сначала $^1/_3$ числа $^5/_6$ (т.-е. уменьшимъ $^5/_6$ въ 3 раза), а затѣмъ результатъ увеличимъ въ 8 разъ:

$$\frac{1}{3} \text{ числа } \frac{5}{6} \text{ составляетъ } \frac{5}{6 \cdot 3} \qquad (\S\ 151,2);$$

$$\text{слѣд., } \frac{8}{3} \text{ числа } \frac{5}{6} \text{ составляютъ } \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 3} = \frac{40}{18} = 2\frac{2}{9}.$$

160. Примѣры задачъ на нахожденіе дроби даннаго числа 1) Поѣздъ въ часъ проходитъ 40 верстъ; сколько верстъ онъ проходитъ въ $^7/_8$ часа?

Очевидно, что въ $^7/_8$ часа поѣздъ проходитъ столько верстъ, сколько ихъ заключается въ $^7/_8$ сорока верстъ; значитъ, для рѣшенія задачи надо найти $^7/_8$ сорока.

2) Аршинъ матеріи стоитъ 8 руб.; сколько рублей стоятъ $^7/_4$ аршинъ?

Очевидно, что $^7/_4$ аршина матеріи стоятъ столько рублей, сколько ихъ заключается въ $^7/_4$ восьми рублей, значитъ, для рѣшенія задачи надо найти $^7/_4$ восьми.

довало дѣлать въ систематическомъ курсѣ ариѳметики, если бы этому курсу предшествовалъ особый пропедевтическій курсъ дробей. При отсутствіи же такого курса нахожденіе дроби даннаго числа и обратный вопросъ полезно выдѣлить въ особую главу, предшествующую систематическому разсмотрѣнію дѣйствій надъ дробями.

161. Нахожденіе числа по данной величинѣ его дроби. Рѣшимъ теперь обратный вопросъ, какъ найти неизвѣстное число, если величина нѣкоторой опредѣленной дроби этого числа намъ задана.

Примѣръ 1-й. Найти число, котораго $^3/_8$ составляютъ 5.

Такъ какъ въ 5-и заключаются 3 восьмыхъ искомаго числа, то, уменьшивъ 5 въ 3 раза, мы найдемъ $^1/_8$ искомаго числа, а увеличивъ результатъ въ 8 разъ, получимъ $^8/_8$ искомаго числа, т. е. искомое число.

Для ясности выразимъ это строчками:

$\frac{3}{8}$ неизвѣстнаго числа составляютъ 5;

слѣд., $\frac{1}{8}$ неизвѣстнаго числа составляетъ $\frac{5}{3}$,

а $\frac{8}{8}$ неизвѣстнаго числа составляютъ $\frac{5}{3}.8=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$

Примѣръ 2-й. Найти число, котораго $^3/_3$ составляютъ $2^2/_9$.

Для ясности выразимъ ходъ разсужденія строчками:

$\frac{8}{3}$ неизвѣстнаго числа составляютъ $2\frac{2}{9}=\frac{20}{9}$;

слѣд., $\frac{1}{3}$ неизвѣстнаго числа составляетъ $\frac{20}{9.8}$,

а $\frac{3}{3}$ неизвѣстнаго числа составляютъ $\frac{20.3}{9.8}=\frac{60}{72}=\frac{5}{6}$.

161,a. Примѣры задачъ на нахожденіе числа по данной величинѣ его дроби. 1) Въ $^3/_4$ часа поѣздъ проходитъ 30 верстъ; сколько верстъ онъ проходитъ въ часъ?

Очевидно, что въ часъ поѣздъ проходитъ такое число верстъ, котораго $^3/_4$ составляютъ 30 верстъ; значитъ, здѣсь приходится найти такое число, котораго $^3/_4$ равны 30.

2) За $1\frac{3}{4}$ арш. (т.-е. за $\frac{7}{4}$ арш.) матеріи заплатили 14 руб.; сколько стоитъ аршинъ этой матеріи?

Очевидно, что аршинъ матеріи стоитъ такое число рублей, котораго $\frac{7}{4}$ составляютъ 14 руб.; значитъ, здѣсь нужно найти число, котораго $\frac{7}{4}$ равны 14.

VI. Дѣйствія надъ отвлеченными дробями.

162*. Смыслъ дѣйствій надъ дробными числами. Такъ какъ дробныя числа выражаютъ нѣкоторыя значенія величины, то дѣйствія надъ ними имѣютъ тотъ же смыслъ, какъ и дѣйствія надъ именованными числами (см. § 104). Такъ, сложить три дроби: $\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{9}{16}$ значитъ найти число, выражающее сумму трехъ значеній величины, изъ которыхъ одно состоитъ изъ 3-хъ четвертей, другое—изъ 7 десятыхъ и третье—изъ 9 шестнадцатыхъ долей *одной и той же единицы* (напр., найти число, выражающее сумму трехъ длинъ: $\frac{3}{4}$ аршина, $\frac{7}{10}$ аршина и $\frac{9}{16}$ аршина).

Кромѣ того для обобщенія нѣкоторыхъ вопросовъ въ курсѣ дробей допускаютъ еще два особыя дѣйствія: умноженіе на отвлеченную дробь и дѣленіе на отвлеченную дробь.

Сложеніе.

163. Опредѣленіе. Сложеніе дробныхъ чиселъ можно опредѣлить такъ же, какъ и сложеніе цѣлыхъ чиселъ (§ 20), а именно:

сложеніе есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго нѣсколько данныхъ чиселъ (слагаемыхъ) соединяются въ одно число (сумму).

Выводъ правила. Разсмотримъ особо слѣдующіе три случая:

1) Пусть требуется найти сумму нѣсколькихъ дробей съ одинаковыми знаменателями, напр., такихъ:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}.$$

Очевидно, что 7 одиннадцатыхъ, да 3 одиннадцатыхъ, да 5 одиннадцатыхъ какой-нибудь единицы составляютъ 7+3+5 одиннадцатыхъ той же единицы:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{7+3+5}{11}=\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}.$$

2) Пусть требуется сложить дроби съ разными знаменателями, напр., такія:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{9}{16}.$$

Приведя всѣ эти дроби къ общему знаменателю, сдѣлаемъ сложеніе, какъ въ первомъ случаѣ:

$$\frac{\overset{20}{\overbrace{3}}}{4}+\frac{\overset{8}{\overbrace{7}}}{10}+\frac{\overset{5}{\overbrace{9}}}{16}=\frac{60+56+45}{80}=\frac{161}{80}=2\frac{1}{80}.$$

Число, поставленное надъ каждою данною дробью, есть дополнительный множитель, на который должно умножить члены дроби, чтобы привести ее къ общему знаменателю.

Правило. Чтобы сложить дроби, ихъ предварительно приводятъ къ общему знаменателю, затѣмъ складываютъ числителей и подъ суммою ихъ подписываютъ общаго знаменателя.

3) Пусть, наконецъ, требуется сложить смѣшанныя числа:

$$4\frac{2}{15},\quad 8\frac{9}{10} \text{ и } 3\frac{5}{6}.$$

Сначала сложимъ дроби:

$$\frac{\overset{2}{2}}{15}+\frac{\overset{3}{9}}{10}+\frac{\overset{5}{5}}{6}=\frac{4+27+25}{30}=\frac{56}{30}=1\frac{26}{30}=1\frac{13}{15}.$$

Теперь сложимъ цѣлыя числа и къ суммѣ ихъ добавимъ 1, получившуюся отъ сложенія дробей:

$$4+8+3+1=16.$$

Значитъ, полная сумма равна $16\frac{13}{15}$.

Замѣчанія. 1) Относительно сложенія дробнаго числа и **нуля** держатся того же условія, какое было указано въ сложеніи цѣлыхъ чиселъ (§ 24,а), а именно: **прибавить 0 къ какому-нибудь числу или прибавить къ 0 какое-нибудь число значитъ оставить это число безъ измѣненія.**

2) **Главное свойство суммы**, указанное нами раньше для цѣлыхъ чиселъ (§ 21), принадлежитъ также и дробнымъ числамъ, т.е. **сумма не зависитъ отъ того порядка, въ которомъ мы соединяемъ единицы и доли единицъ слагаемыхъ.** Такъ, чтобы сложить смѣшанныя числа, данныя въ примѣрѣ 3-мъ, мы можемъ сложить сначала цѣлыя числа (получимъ 15), а потомъ дроби (получимъ $1^{13}/_{15}$) и обѣ суммы соединить въ одно число (получимъ $16^{13}/_{15}$); или можемъ сложить сначала 2-е и 3-е слагаемыя (получимъ $12^{11}/_{15}$), а потомъ добавить 1-е слагаемое (получимъ $16^{13}/_{15}$) Въ какомъ бы порядкѣ мы ни соединяли единицы и доли единицъ слагаемыхъ, всегда получимъ одну и ту же сумму*).

Вычитаніе.

164. Опредѣленіе. Вычитаніе есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ

*) Такъ же, какъ и для цѣлыхъ чиселъ, свойство это въ сущности распадается на 2 отдѣльныя свойства **перемѣстительное** и **сочетательное** (см. § 21,а).

(уменьшаемому) и одному **слагаемому** (вычитаемому) **отыскивается другое слагаемое** (остатокъ или разность).

Другими словами, вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго узнается, какое число останется отъ уменьшаемаго, если отъ него отдѣлимъ часть, равную вычитаемому.

Выводъ правила. Разсмотримъ особо слѣдующіе 3 случая:

1) Пусть даны для вычитанія дроби съ одинаковыми знаменателями, напр., такія:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}.$$

Если отъ 7 восьмыхъ отдѣлимъ часть, равную 3 восьмымъ, то останется, очевидно, 7—3 восьмыхъ:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

2) Пусть данныя дроби имѣютъ разныхъ знаменателей; напр.:

$$\frac{11}{15}-\frac{3}{8}.$$

Тогда, приведя эти дроби къ общему знаменателю, сдѣлаемъ вычитаніе, какъ было объяснено раньше:

$$\frac{\overset{8}{\overline{11}}}{15}-\frac{\overset{15}{\overline{3}}}{8}=\frac{88-45}{120}=\frac{43}{120}$$

Правило. Чтобы вычесть дробь изъ дроби, предварительно приводятъ къ общему знаменателю, затѣмъ изъ числителя уменьшаемаго вычитаютъ числителя вычитаемаго и подъ ихъ разностью подписываютъ общаго знаменателя.

3) Если нужно вычесть смѣшанное число изъ другого смѣшаннаго числа, то, если можно, вычитаютъ

дробь изъ дроби, а цѣлое изъ цѣлаго. Напр.:

$$8\frac{9}{11}-5\frac{3}{4}=8\frac{36}{44}-5\frac{33}{44}=3\frac{3}{44}.$$

Если же дробь вычитаемаго больше дроби уменьшаемаго, то берутъ одну единицу изъ цѣлаго числа уменьшаемаго, раздробляютъ ее въ надлежащія доли и прибавляютъ къ дроби уменьшаемаго. Напр.:

$$10\frac{3}{11}-5\frac{5}{6}=10\frac{18}{66}-5\frac{55}{66}=9\frac{84}{66}-5\frac{55}{66}=4\frac{29}{66}.$$

Такъ же производится вычитаніе дроби изъ цѣлаго числа; напр.:

$$7-2\frac{3}{5}=6\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=4\frac{2}{5}$$

$$10-\frac{3}{17}=9\frac{17}{17}-\frac{3}{17}=9\frac{14}{17}.$$

Замѣчаніе. При вычитаніи нуля держатся того же условія, какое было указано при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ (§ 31, замѣчаніе 1-е), а именно: **вычесть 0 изъ какого-нибудь числа значитъ оставить это число безъ измѣненія.**

165. Измѣненіе суммы и разности при измѣненіи данныхъ чиселъ. Сумма и разность дробныхъ чиселъ измѣняются при измѣненіи данныхъ чиселъ совершенно такъ же, какъ сумма и разность цѣлыхъ чиселъ, а именно:

1) Если увеличивается (или уменьшается) слагаемое, то и сумма увеличивается (или уменьшается) на столько же.

2) Если увеличивается (или уменьшается) уменьшаемое, то и разность увеличивается (или уменьшается) на столько же.

3) Если увеличивается (или уменьшается) вычитаемое то разность уменьшается (или увеличивается) на столько же*)

Умноженіе.

166. Опредѣленія. Умноженіе дробнаго числа на цѣлое опредѣляется такъ же, какъ и умноженіе цѣлыхъ чиселъ, а именно: **умножить какое-нибудь число** (множимое) **на цѣлое число** (множитель) **значитъ повторить множимое слагаемымъ столько разъ, сколько во множителѣ единицъ.**

Такъ, умножить $^7/_8$ на 5 значитъ повторить $^7/_8$ слагаемымъ 5 разъ, другими словами, найти сумму:

$$^7/_8+{}^7/_8+{}^7/_8+{}^7/_8+{}^7/_8$$

Это опредѣленіе теряетъ смыслъ для того случая, когда множитель есть дробь. Напр., нельзя сказать, что умножить 5 на $^7/_8$ значитъ повторить числа 5 слагаемымъ $^7/_8$ раза, такъ какъ выраженіе «$^7/_8$ раза» не имѣетъ смысла.

Умноженію на дробь мы условимся придавать слѣдующій смыслъ:

умножить какое-нибудь число (множимое) **на дробь** (множитель) **значитъ найти эту дробь множимаго.**

Такъ, умножить 5 на $^7/_8$ значитъ найти $^7/_8$ пяти единицъ.

Такимъ образомъ, нахожденіе дроби даннаго числа, разсмотрѣнное нами раньше (§ 159), мы будемъ теперь называть умноженіемъ на дробь**).

---

*) Такъ же, какъ это было нами сдѣлано для цѣлыхъ чиселъ (см. выноску къ § 38), доказывается, что указанныя измѣненія суммы составляютъ слѣдствія свойствъ перемѣстительнаго и сочетательнаго. Измѣненія разности составляютъ слѣдствія опредѣленія вычитанія, какъ дѣйствія, обратнаго сложенію.

**) Опредѣленіе умноженія на дробь можно примѣнять и къ цѣлому числу, если только цѣлое число предварительно обратить въ неправильную дробь (§ 146). Но въ такомъ случаѣ возникаетъ вопросъ, не будетъ ли опредѣленіе умноженія на дробь противорѣчить опредѣленію умноженія на цѣлое число. Положимъ, напр., что требуется умножить 5 на 3. По опредѣленію умноженія на цѣлое число это значитъ повторить 5 слагаемыхъ 3 раза. Если же мы вмѣсто цѣлаго множителя 3 возь-

***Задача.** Аршинъ сукна стоитъ 5 руб.; сколько стоятъ нѣсколько аршинъ этого сукна?

Для рѣшенія вопроса мы должны умножить 5 руб. на число аршинъ, когда это число цѣлое (напр. 10 арш.), и мы должны найти дробь 5-ти руб., когда число аршинъ дробное (напр., $^{13}/_{2}$ арш.).

Если нахожденіе дроби числа мы условимся называть умноженіемъ на дробь, то на нашу задачу можно дать одинъ общій отвѣтъ: надо цѣну одного аршина умножить на число аршинъ.

Число, получаемое послѣ умноженія, наз. **произведеніемъ** (какъ и въ случаѣ умноженія цѣлыхъ чиселъ).

Замѣтимъ теперь же, что **отъ умноженія на правильную дробь число уменьшается, а отъ умноженія на неправильную дробь число увеличивается, если эта неправильная дробь больше 1, и остается безъ измѣненія, если она равна 1.**

Напр., произведеніе $5 \cdot {}^{7}/_{8}$ должно быть меньше 5-и, такъ какъ оно означаетъ $^{7}/_{8}$ пяти, а $^{7}/_{8}$ пяти меньше $^{8}/_{8}$ пяти; произведеніе $5 \cdot {}^{9}/_{8}$ должно быть больше 5-и, потому что оно означаетъ $^{9}/_{8}$ пяти, а $^{9}/_{8}$ пяти больше $^{8}/_{8}$ пяти; наконецъ, произведеніе $5 \cdot {}^{8}/_{8}$, т.-е. $^{8}/_{8}$ пяти, равно 5.

Замѣчаніе. При умноженіи дробныхъ чиселъ, такъ же какъ и цѣлыхъ, **произведеніе принимается равнымъ 0, если какой-нибудь изъ сомножителей равенъ 0**, такъ, $0 \cdot {}^{7}/_{8}=0$ и $^{7}/_{8} \cdot 0=0$.

167. Выводъ правилъ.

Разсмотримъ особо слѣдующіе 4 случая:

мемъ неправильную дробь, равную 3, напр. $^{30}/_{10}$, и станемъ 5 умножать не на 3, а на $^{30}/_{10}$, то, согласно опредѣленію умноженія на дробь, мы должны будемъ найти $^{30}/_{10}$ числа 5. Такъ какъ $^{10}/_{10}$ числа 5 составляютъ ровно 5, то $^{30}/_{10}$ числа 5 составляютъ 5, повторенное слагаемымъ 3 раза; слѣд., будемъ ли мы 5 умножать на 3, или на $^{30}/_{10}$, результатъ умноженія окажется одинъ и тотъ же. Такимъ образомъ, **опредѣленіе умноженія на дробь не противорѣчитъ опредѣленію умноженія на цѣлое число.**

1) Умноженіе дроби на цѣлое число. Пусть требуется $^3/_{10}$ умножить на 5. Это значитъ: повторить $^3/_{10}$ слагаемымъ 5 разъ, иначе сказать, увеличить $^3/_{10}$ въ 5 разъ. Чтобы увеличить какую-нибудь дробь въ 5 разъ, достаточно увеличить ея числителя или уменьшить ея знаменателя въ 5 разъ (§ 153). Поэтому:

$$\frac{3}{10}\times 5=\frac{3\,.\,5}{10}=\frac{15}{10} \text{ или } \frac{3}{10}\times 5=\frac{3}{10:5}=\frac{3}{2}.$$

Правило 1-е. Чтобы умножить дробь на цѣлое число, умножаютъ на это цѣлое число числителя или дѣлятъ на него знаменателя дроби.

Слѣдствіе. Произведеніе дроби на ея знаменателя равно ея числителю. Напр.:

$$\frac{5}{8}\;8=\frac{5\,.\,8}{8}=5;\;\frac{22}{7}\;7=\frac{22\,.\,7}{7}=22.$$

2) Умноженіе цѣлаго числа на дробь. Пусть дано умножить 7 на $^4/_9$. Это значитъ: найти $^4/_9$ числа 7. Для этого найдемъ сначала $^1/_9$ числа 7, а потомъ $^4/_9$.

Такъ какъ $\frac{1}{9}$ числа 7 составляетъ $\frac{7}{9}$,

а $\frac{4}{9}$ числа больше $\frac{1}{9}$ этого числа въ 4 раза,

то $\frac{4}{9}$ числа 7 составляютъ $\frac{7\,.\,4}{9}$.

Значитъ: $7\times\frac{4}{9}=\frac{7\,.\,4}{9}=\frac{28}{9}$.

Правило 2-е. Чтобы умножить цѣлое число на дробь, умножаютъ цѣлое число на числителя дроби и это произведеніе дѣлаютъ числителемъ, а знаменателемъ подписываютъ знаменателя дроби.

3) Умноженіе дроби на дробь. Пусть надо умножить $^3/_5$ на $^7/_8$. Это значитъ: найти $^7/_8$ числа $^3/_5$. Для этого сначала найдемъ $^1/_8$, а затѣмъ $^7/_8$ числа $^3/_5$.

Такъ какъ $\frac{1}{8}$ числа $\frac{3}{5}$ составляетъ $\frac{3}{5 \cdot 8}$,

а $\frac{7}{8}$ числа больше $\frac{1}{8}$ этого числа въ 7 разъ,

то $\frac{7}{8}$ числа $\frac{3}{5}$ составляютъ $\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8}$.

Значитъ: $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}$.

Правило 3-е. Чтобы умножить дробь на дробь, умножаютъ числителя на числителя и знаменателя на знаменателя и первое произведеніе берутъ числителемъ, а второе—знаменателемъ.

Замѣчаніе. Это правило можно примѣнять и къ умноженію дроби на цѣлое число и цѣлаго числа на дробь, если только цѣлое число будемъ разсматривать, какъ дробь съ знаменателемъ 1. Такъ:

$$\frac{3}{10} \times 5 = \frac{3}{10} \times \frac{5}{1} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 1} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2};$$

$$7 \times \frac{4}{9} = \frac{7}{1} \times \frac{4}{9} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 9} = \frac{28}{9}.$$

4) Умноженіе смѣшанныхъ чиселъ. **Правило 4-е. Чтобы умножить смѣшанныя числа, ихъ предварительно обращаютъ въ неправильныя дроби и затѣмъ умножаютъ по правиламъ умноженія дробей.** Напр.:

$$7 \times 5\frac{3}{4} = 7 \times \frac{23}{4} = \frac{7 \cdot 23}{4} = \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4};$$

$$2\frac{3}{5} \times 4\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{14}{3} = \frac{13 \cdot 14}{5 \cdot 3} = \frac{182}{15} = 12\frac{2}{15}.$$

Впрочемъ, обращеніе смѣшанныхъ чиселъ въ неправильныя дроби не составляетъ необходимости. Напр., чтобы умножить 7 на $5^3/_4$, можно 7 повторить слагаемымъ 5 разъ и къ полученной суммѣ приложить $^3/_4$ 7-и:

$$7 \cdot 5\frac{3}{4} = (7 \times 5) + (7 \times \frac{3}{4}) = 35 + \frac{21}{4} = 40\frac{1}{4}.$$

168. Сокращенiе при умноженiи. При умноженiи дробей иногда можно дѣлать сокращенiе. Напр.:

$$1)\ 12\times\frac{7}{8}=\frac{12\cdot 7}{8}=\frac{3\cdot 7}{2}=\frac{21}{2};$$

$$2)\ \frac{16}{21}\times\frac{5}{28}=\frac{16\times 5}{21\times 28}=\frac{4\times 5}{21\cdot 7}=\frac{20}{147}.$$

Такое сокращенiе возможно дѣлать потому, что величина дроби не измѣнится, если числителя и знаменателя ея уменьшимъ въ одинаковое число разъ.

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что при умноженiи можно сокращать цѣлое число съ знаменателемъ дроби и числителя одной дроби съ знаменателемъ другой.

169. Произведенiе трехъ и болѣе дробей. Пусть дано перемножить три дроби: $\frac{2}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}$. Это значитъ, что $^2/_3$ требуется умножить на $^7/_8$ и полученное произведенiе умножить затѣмъ на $^5/_6$. Умноживъ двѣ первыя дроби, получимъ: $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 8}$; умноживъ это число на третью дробь, найдемъ $\frac{2\cdot 7\cdot 5}{3\cdot 8\cdot 6}=\frac{70}{144}$. Значитъ:

чтобы перемножить нѣсколько дробей, перемножаютъ ихъ числителей между собою и знаменателей между собою и первое произведенiе берутъ числителемъ, а второе—знаменателемъ.

Если въ числѣ множителей есть смѣшанныя числа, то ихъ обращаютъ въ неправильныя дроби.

Замѣчанiе. Это правило можно примѣнять и къ такимъ произведенiямъ, въ которыхъ нѣкоторые множители числа цѣлыя, если только цѣлое число будемъ разсматривать, какъ дробь, у которой знаменатель 1. Напр.:

$$\frac{3}{4}\times 5\times\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{1}\times\frac{5}{6}=\frac{3.5.5}{4.1.6}=\frac{5.5}{4.2}=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}$$

170. Свойства произведенія. Тѣ свойства произведенія, которыя были нами указаны для цѣлыхъ чиселъ (§§ 59, 60 и 61), принадлежатъ и произведенію дробныхъ сомножителей. Укажемъ эти свойства.

1) **Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ сомножителей** (перемѣстительное свойство).

Напр. $$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}.$$

Дѣйствительно, первое произведеніе равно дроби $\frac{2.5.3}{3.6.4}$, а второе равно дроби $\frac{5.3.2}{6.4.3}$. Но эти дроби одинаковы, потому что ихъ члены отличаются только порядкомъ цѣлыхъ сомножителей; а произведеніе цѣлыхъ чиселъ не измѣняется при перемѣнѣ мѣстъ сомножителей.

2) **Чтобы умножить какое-нибудь число на произведеніе, достаточно умножить это число на перваго сомножителя, полученное число умножить на второго, и т. д.**

Пусть, напр., надо умножить:

$$10\times\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\right),\qquad \text{т. е. } 10\times\frac{15}{28}.$$

Разъяснимъ, что для этого достаточно умножить 10 на $^3/_4$, а потомъ полученное число умножить еще на $^5/_7$. Дѣйствительно, когда мы умножимъ 10 на $^3/_4$, то мы найдемъ $^3/_4$ десяти; если затѣмъ эти $^3/_4$ десяти умножимъ еще на $^5/_7$, то получимъ $^5/_7$ трехъ четвертей 10-и. Но $^5/_7$ трехъ четвертей (чего-либо) составляютъ $^3/_4 . ^5/_7$, т.-е. $^{15}/_{28}$ (этого чего-либо), значитъ, послѣ двухъ умноженій 10-и на $^3/_4$ и полученнаго числа на $^5/_7$, мы найдемъ тотъ же самый результатъ, какъ и отъ одного умноженія 10-и на $^{15}/_{28}$.

3) **Произведеніе не измѣнится, если какіе-либо сомножители будутъ замѣнены ихъ произведеніемъ.**

Напр.: $$\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{35}=\frac{1}{28}$$

*Замѣчанія. 1). Свойства 2-е и 3-е, какъ это было уже указано для цѣлыхъ чиселъ (см. § 61,а), составляютъ въ сущности одно свойство, называемое сочетательнымъ.

2) Распредѣлительное свойство произведенія также принадлежитъ дробнымъ числамъ. Доказательство этого предложенія излагается обыкновенно въ курсахъ алгебры.

Дѣленіе.

171. Опредѣленіе. Дѣленіе есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію (дѣлимому) и одному изъ сомножителей (дѣлителю) отыскивается другой сомножитель (частное).

Напр., раздѣлить $^7/_8$ на $^3/_5$ значитъ: найти такое число, которое надо умножить на $^3/_5$, чтобы получить $^7/_8$; или найти такое число, на которое надо умножить $^3/_5$, чтобы получить $^7/_8$. Въ первомъ случаѣ частное представляетъ собою искомое множимое, во второмъ случаѣ—искомаго множителя. Такъ какъ множимое и множитель могутъ мѣняться мѣстами, то **величина частнаго не зависитъ отъ того, означаетъ ли оно множимое или множителя.**

172. Слѣдствія. 1) **Нахожденіе неизвѣстнаго числа по данной его дроби,** разсмотрѣнное нами прежде (§ 161), **можетъ быть выполняемо посредствомъ дѣленія на дробь.**

Такъ, если требуется найти такое число, котораго $^7/_8$ составляютъ 5, то это, другими словами, значитъ: найти такое число, которое составитъ 5, если его умножимъ на $^7/_8$, значитъ, 5 есть произведеніе, $^7/_8$—множитель, а отыскивается множимое; а это дѣлается посредствомъ дѣленія 5 на $^7/_8$.

2) **Отъ дѣленія на правильную дробь число увеличивается, а отъ дѣленія на неправильную дробь число уменьшается, если эта неправильная дробь больше 1, и остается безъ измѣненія, если она равна 1.**

Напр., частное 5 : $^7/_8$ должно быть больше 5-и, потому что 5 составляетъ только $^7/_8$ этого частнаго; частное 5 : $^9/_8$ должно быть меньше 5-и, потому что 5 составляетъ $^9/_8$ его, и, наконецъ, частное 5 : $^8/_8$ должно быть равно 5.

173. Выводъ правилъ. Разсмотримъ особо слѣдующіе 5 случаевъ дѣленія.

1) Дѣленіе цѣлаго числа на цѣлое. Этотъ случай былъ разсмотрѣнъ въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ. Но тамъ точное дѣленіе не всегда было возможно, такъ какъ дѣлимое не всегда есть произведеніе дѣлителя на цѣлое число; поэтому приходилось разсматривать дѣленіе съ остаткомъ. Теперь же, допустивъ умноженіе на дробь, мы всякій случай дѣленія цѣлыхъ чиселъ можемъ считать возможнымъ. Пусть, напр., требуется раздѣлить 5 на 7, т.-е. найти число, котораго произведеніе на 7 даетъ 5. Такое число есть дробь $^5/_7$, потому что $^5/_7 . 7=5$. Точно такъ же $20 : 7={}^{20}/_7$, потому что $^{20}/_7 . 7=20$.

Правило 1-е. Частное отъ дѣленія двухъ цѣлыхъ чиселъ можно выразить дробью, у которой числитель равенъ дѣлимому, а знаменатель—дѣлителю.

2) Дѣленіе дроби на цѣлое число. Пусть требуется раздѣлить $^8/_9$ на 4. Это значитъ: найти число, которое надо умножить на 4, чтобы получить $^8/_9$. Но отъ умноженія на 4 всякое число увеличивается въ 4 раза; значитъ, искомое число, увеличенное въ 4 раза, должно составить $^8/_9$ и потому, чтобы найти его, достаточно дробь $^8/_9$ уменьшить въ 4 раза. Чтобы уменьшить дробь въ 4 раза, надо уменьшить въ 4 раза ея числителя или увеличить въ 4 раза ея знаменателя; поэтому:

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{2}{9};$$

или

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 . 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9},$$

Правило 2-е. Чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, дѣлятъ на это цѣлое число числителя дроби или умножаютъ на него знаменателя дроби.

3) Дѣленіе цѣлаго числа на дробь. Пусть требуется раздѣлить 3 на $^2/_5$. Это значитъ: найти такое число, которое надо умножить на $^2/_5$, чтобы получить 3. Но умножить какое-нибудь число на $^2/_5$ значитъ найти $^2/_5$ этого числа; поэтому:

$$\frac{2}{5} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = 3,$$

слѣд.: $$\frac{1}{5} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{3}{2},$$

а $$\frac{5}{5} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{3}{2} . 5 = \frac{3.5}{2}.$$

Значитъ: $$3 : \frac{2}{5} = \frac{3.5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Правило 3-е. Чтобы раздѣлить цѣлое число на дробь, умножаютъ это цѣлое число на знаменателя дроби и произведеніе дѣлятъ на числителя дроби.

4) Дѣленіе дроби на дробь. Пусть дано раздѣлить $^5/_6$ на $^7/_{11}$. Это значитъ: найти число, которое, умноженное на $^7/_{11}$, составитъ $^5/_6$. Но умножить какое-нибудь число на $^7/_{11}$ значитъ найти $^7/_{11}$ этого числа; поэтому:

$$\frac{7}{11} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{5}{6},$$

слѣд.: $$\frac{1}{11} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{5}{6,7},$$

а $$\frac{11}{11} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{5.11}{6.7}.$$

Значитъ: $$\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5.11}{6.\ 7} = \frac{55}{42} = 1\frac{13}{42}.$$

Правило 4-е. Чтобы раздѣлить дробь на дробь, умножаютъ числителя первой дроби на знаменателя второй, а знаменателя первой дроби — на числителя второй и первое произведеніе дѣлятъ на второе.

Замѣчаніе. Подъ это правило можно подвести и всѣ предыдущіе случаи, если только цѣлое число будемъ разсматривать, какъ дробь съ знаменателемъ 1. Такъ:

$$5:7=\frac{5}{1}:\frac{7}{1}=\frac{5.1}{1.7}=\frac{5}{7}.$$

$$\frac{8}{9}:4=\frac{8}{9}:\frac{4}{1}=\frac{8.1}{9.4}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}.$$

$$3:\frac{2}{5}=\frac{3}{1}:\frac{2}{5}=\frac{3.5}{1.2}=\frac{15}{2}.$$

б) Дѣленіе смѣшанныхъ чиселъ. **Правило 5-е. Чтобы раздѣлить смѣшанныя числа, ихъ предварительно обращаютъ въ неправильныя дроби и затѣмъ дѣлятъ по правиламъ дѣленія дробей.** Напр.:

$$8:3\frac{5}{6}=8:\frac{23}{6}=\frac{8.6}{23}=\frac{48}{23}=2\frac{2}{23};$$

$$7\frac{3}{4}:5\frac{1}{2}=\frac{31}{4}:\frac{11}{2}=\frac{31.2}{4.11}=\frac{31}{22}=1\frac{9}{22}$$

174. Общее правило дѣленія. Если переставимъ въ данной дроби числителя на мѣсто знаменателя и наоборотъ, то дробь, получившаяся послѣ этой перестановки, называется **обратною** по отношенію къ данной. Такъ, для $^7/_8$ обратная дробь будетъ $^8/_7$. Цѣлое число также имѣетъ обратную дробь; напр., для 5 или для $^5/_1$, обратная дробь будетъ $^1/_5$ Условившись въ этомъ, можемъ высказать такое общее правило дѣленія:

чтобы раздѣлить одно число на другое, достаточно дѣлимое умножить на дробь, обратную дѣлителю.

Въ вѣрности этого правила легко убѣдиться изъ слѣдующаго примѣрнаго сравненія:

$$5:7=\frac{5}{7} \quad \text{и} \quad 5\times\frac{1}{7}=\frac{5}{7};$$

$$\frac{7}{8}:5=\frac{7}{40} \quad \text{и} \quad \frac{7}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{40};$$

$$5 : \frac{7}{8} = \frac{40}{7} \text{ и } 5 \times \frac{8}{7} = \frac{40}{7};$$

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{12} \text{ и } \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12}.$$

175. Сокращенiе при дѣленiи. При дѣленiи дробныхъ чиселъ иногда можно дѣлать сокращенiе. Напр.:

1) $$12 : \frac{8}{11} = \frac{12 . 11}{8} = \frac{3 . 11}{2} = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2};$$

2) $$\frac{8}{9} : \frac{6}{7} = \frac{8 . 7}{9 . 6} = \frac{4 . 7}{9 . 3} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27};$$

3) $$\frac{5}{12} : \frac{7}{18} = \frac{5 . 18}{12 . 7} = \frac{5 . 3}{2 . 7} = \frac{15}{14} = 1\frac{1}{14}.$$

Такое сокращенiе возможно дѣлать потому, что величина дроби не измѣнится, если числителя и знаменателя ея уменьшимъ въ одинаковое число разъ.

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что при дѣленiи можно сокращать цѣлое число съ числителемъ и числителя съ числителемъ, знаменателя съ знаменателемъ.

176. Примѣры задачъ, рѣшаемыхъ дѣленiемъ. Дѣленiе употребляется во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда одно изъ данныхъ чиселъ возможно разсматривать какъ произведенiе, а другое, какъ множимое или множителя. Приведемъ примѣры:

Задача 1. Во сколько часовъ пѣшеходъ пройдетъ путь въ $34^7/_8$ версты, если каждый часъ онъ проходитъ по $4^1/_2$ версты?

Для рѣшенiя задачи надо узнать, сколько разъ $4^1/_2$ версты слѣдуетъ повторить слагаемымъ, чтобы получить $34^7/_8$ версты; т. е. надо отыскать, на какое число слѣдуетъ умножить $4^1/_2$, чтобы получить въ произведенiи $34^7/_8$. Здѣсь $34^7/_8$ есть произведенiе, $4^1/_2$ — множимое, а требуется найти множителя; это выполняется дѣленiемъ:

$$34\frac{7}{8}:4\frac{1}{2}=\frac{279}{8}:\frac{9}{2}=\frac{31}{4}=7\frac{3}{4}.$$

Частное показываетъ, что если $4^1/_2$ версты повторить слагаемымъ 7 разъ и къ результату добавить еще $^3/_4$ отъ $4^1/_2$ верстъ, то получится $34^7/_8$ версты; значитъ, $34^7/_8$ версты будутъ пройдены въ $7^3/_4$ часа.

Задача 2. Сколько аршинъ сукна можно купить на 6 руб., если каждый аршинъ стоитъ $7^1/_2$ рублей?

Очевидно, на 6 руб. нельзя купить ни одного аршина сукна, стоимостью въ $7^1/_2$ руб.; но можно купить нѣкоторую часть аршина. Чтобы узнать, какую именно, достаточно опредѣлить, на какую дробь слѣдуетъ умножить $7^1/_2$, чтобы получить 6. Здѣсь 6 произведеніе, $7^1/_2$ множимое а отыскивается множитель; поэтому вопросъ рѣшается дѣленіемъ:

$$6:7\frac{1}{2}=6:\frac{15}{2}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}.$$

Частное показываетъ, что $^4/_5$ числа $7^1/_2$ составляютъ 6; значитъ, на 6 руб. можно купить $^4/_5$ арш., стоимостью въ $7^1/_2$ руб. за аршинъ.

Задача 3. За $7^3/_4$ фунта чаю заплачено $18^3/_5$ рубля. Сколько стоитъ фунтъ чаю?

Для рѣшенія задачи надо найти такое число, которое, повторенное слагаемымъ $7^3/_4$ раза *), составитъ $18^3/_5$. Здѣсь $18^3/_5$ произведеніе, $7^3/_4$—множитель, а отыскивается множимое; значитъ, задача рѣшается дѣленіемъ:

$$18\frac{3}{5}:7\frac{3}{4}=\frac{93}{5}:\frac{31}{4}=\frac{93\,.\,4}{5\,.\,31}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}.$$

Фунтъ чаю стоитъ $2^2/_5$ руб., т.-е. 2 руб. 40 коп.

Задача 4. За $^7/_8$ аршина матеріи заплачено 14 руб. Сколько стоитъ аршинъ этой матеріи?

---

*) Сокращенное выраженіе; «повторить какое-нибудь число слагаемымъ $7^3/_4$ раза» означаетъ: «повторить какое-нибудь число слагаемымъ 7 разъ и къ суммѣ добавить $^3/_4$ этого числа».

Очевидно, за аршинъ матеріи заплачено такое число руб., котораго $^7/_8$ составляютъ 14 руб., т.-е. такое число, которое слѣдуетъ умножить на $^7/_8$, чтобы получить 14 руб. Здѣсь 14 произведеніе, $^7/_8$—множитель, а отыскивается множимое:

$$14 : \frac{7}{8} = \frac{14 \cdot 8}{7} = 16.$$

Аршинъ матеріи стоитъ 16 рублей.

Замѣчаніе. Чтобы быстрѣе сообразить, какимъ дѣйствіемъ рѣшается та или другая задача, содержащая дробныя числа, полезно поставить себѣ вопросъ, какимъ дѣйствіемъ надо было бы рѣшать ту же самую задачу, если бы въ ней дробныя числа были замѣнены цѣлыми. Возьмемъ, напр., приведенную выше задачу 4-ю и измѣнимъ ее, положимъ, такъ: «за 2 арш. матеріи заплачено 14 руб. Сколько стоитъ аршинъ этой матеріи?» Конечно, въ такомъ видѣ задача эта рѣшается дѣленіемъ. Тѣмъ же дѣйствіемъ она должна рѣшаться и тогда, когда число аршинъ задано дробное.

177*. Измѣненіе произведенія и частнаго при измѣненіи данныхъ чиселъ. Произведеніе и частное дробныхъ чиселъ измѣняются такъ же, какъ произведеніе и частное цѣлыхъ чиселъ.

Эти измѣненія полезно выразить теперь въ болѣе общемъ видѣ, чѣмъ мы выражали прежде (§§ 79—83), и именно такъ:

1) **Если умножимъ одного изъ сомножителей на какое-либо число, то и произведеніе умножится на то же число.**

Такъ, если въ примѣрѣ:

$$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

умножимъ множимое на $\frac{7}{4}$, то произведеніе будетъ:

$$\left(5 \cdot \frac{7}{4}\right) \cdot \frac{2}{3}, \quad \text{т.-е. } 5 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{3}.$$

Переставивъ въ этомъ произведеніи сомножителей $^7/_4$ и $^8/_3$, отчего произведеніе не измѣнится, мы получимъ:

$$5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{10}{3} \cdot \frac{7}{4}.$$

Такимъ образомъ, прежнее произведеніе умножилось тоже на $^7/_4$.

Такъ какъ множимое и множителя можно помѣнять мѣстами, то сказанное относится и ко множителю.

2) **Если раздѣлимъ одного изъ сомножителей на какое-либо число, то и произведеніе раздѣлится на то же число**, потому что раздѣлить на какое-либо число все равно, что умножить на обратную дробь.

3) **Если умножимъ дѣлимое на какое-нибудь число, то и частное умножится на то же число.**

Дѣйствительно, дѣлимое есть произведеніе, а дѣлитель и частное—сомножители; значитъ, умножая дѣлимое и оставляя дѣлителя безъ перемѣны, мы умножаемъ произведеніе и оставляемъ безъ измѣненія одного сомножителя; а это возможно только тогда, когда другой сомножитель, т.-е. частное, умножится на то же число.

4) **Если умножимъ дѣлителя на какое-либо число, то частное раздѣлится на то же число.**

Дѣйствительно, умножая дѣлителя и оставляя дѣлимое безъ перемѣны, мы умножаемъ одного сомножителя и оставляемъ безъ измѣненія произведеніе; а это можетъ быть только тогда, когда другой сомножитель, т.-е. частное, раздѣлится на то же число.

Подобныя же заключенія можно вывести относительно дѣленія дѣлимаго и дѣлителя на какое-либо число.

VII. Именованныя дроби.

178. Раздробленіе. Пусть требуется $^7/_9$ пуда раздробить въ золотники. Для этого раз-

дробляемъ $^7/_9$ пуда сначала въ фунты, а потомъ въ золотники.

$^7/_9$ пуда раздробляемъ въ фунты. 1 пудъ имѣетъ 40 фунтовъ; слѣд., $^7/_9$ пуда содержатъ $^7/_9$ сорока фунтовъ. Чтобы найти $^7/_9$ сорока, надо умножить 40 на $^7/_9$ (или $^7/_9$ на 40):

$$\frac{7}{9} \times 40 = \frac{280}{9} \text{ (фунта).}$$

$\frac{280}{9}$ фунта раздробляемъ въ зол. 1 фунтъ имѣетъ 96 золотн.; слѣд., $\frac{280}{9}$ фунта содержатъ $\frac{280}{9}$ числа 96 зол.; чтобы найти $\frac{280}{9}$ числа 96-ти, надо 96 умножить на $\frac{280}{9}$ $\left(\text{или } \frac{280}{9} \text{ на } 96\right)$:

$$\frac{280}{9} \times 96 = \frac{8960}{3} = 2896\,\frac{2}{3} \text{ (золотн.).}$$

Такимъ образомъ, раздробленіе дробнаго именованнаго числа производится такъ же, какъ и цѣлаго числа, т.-е. посредствомъ умноженія на единичное отношеніе.

179. Превращеніе. Пусть требуется $^3/_4$ арш. превратить въ версты, т.-е. узнать, какую часть версты составляютъ $^3/_4$ арш. Для этого превратимъ ихъ сначала въ сажени, а потомъ—въ версты.

$^3/_4$ арш. превращаемъ въ сажени. Это значитъ узнать, какую часть сажени, т.-е. 3-хъ аршинъ, составляютъ $^3/_4$ аршина; другими словами: на какую дробь надо умножить 3, чтобы получить $^3/_4$. Это узнается дѣленіемъ:

$$\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}.$$

Значитъ, $^3/_4$ арш. составляютъ $^1/_4$ сажени.

$^1/_4$ сажени превращаемъ въ версты, т.-е. узнаемъ, какую часть версты, т.-е. 500 саженъ, составляетъ $^1/_4$ сажени; другими словами: на какую дробь надо умножить 500, чтобы получить $^1/_4$. Это узнается дѣленіемъ:

$$\frac{1}{4} : 500 = \frac{1}{2000},$$

слѣд., $^1/_4$ саж. составляетъ $\frac{1}{2000}$ версты.

Такимъ образомъ, превращеніе дробнаго именованнаго числа производится такъ же, какъ и цѣлаго числа, т.-е. посредствомъ дѣленія на единичное отношеніе.

180. Задачи. 1. Обратить въ составное именованное число $\frac{7}{800}$ версты.

Это значитъ: узнать, сколько въ $\frac{7}{800}$ вер. заключается саженъ, аршинъ и т. д. Это дѣлается посредствомъ раздробленія:

$\frac{7}{800}$ версты въ сажени: $\frac{7}{800} \times 500 = \frac{35}{8} = 4^3/_8$ (саж.).

Оставляя въ сторонѣ 4 сажени, раздробимъ:

$^3/_8$ саж. въ аршины: $^3/_8 \times 3 = ^9/_8 = 1^1/_8$ (арш.).

Оставляя въ сторонѣ 1 арш., раздробимъ:

$^1/_8$ арш. въ вершки: $^1/_8 \times 16 = 2$ (вершка).

Слѣдовательно, $\frac{7}{800}$ версты $= 4$ саж. 1 арш. 2 верш.

2. Какую часть сутокъ составляютъ 3 часа $7^5/_8$ мин.?

Эта задача рѣшается посредствомъ превращенія:

$7^5/_8$ минутъ превращаемъ въ часы:

$$\frac{61}{8} : 60 = \frac{61}{480} \text{ (часа)}.$$

Прибавляемъ 3 часа: $\frac{61}{480}+3=\frac{1501}{480}$ (часовъ).

$\frac{1501}{480}$ часа превращаемъ въ сутки. $\frac{1501}{480}:24=\frac{1501}{11520}$ (сутокъ).

181. Сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе дробныхъ именованныхъ чиселъ можно производить двоякимъ путемъ: 1) или, выразивъ всѣ данныя именованныя числа въ мѣрахъ одного и того же названія, поступаютъ съ ними, какъ съ дробями отвлеченными; 2) или, обративъ всѣ данныя въ составныя именованныя числа, поступаютъ съ ними, какъ съ цѣлыми именованными числами. Напр.:

1) Сложить: $^3/_7$ версты $+$ 2 в. $15^3/_4$ саж. $+$ 101 саж. 1 арш. $2^1/_2$ вершка.

$^3/_7$ версты превращаемъ въ составное именованное число:

$$^3/_7\times500=\frac{1500}{7}=214^2/_7 \text{ (саж.)}; \quad ^2/_7\times3=^6/_7 \text{ (арш.)}$$

$$^6/_7\times16=\frac{96}{7}=13^5/_7 \text{ (вершк.)}.$$

Слѣд., $^3/_7$ в. $=214$ саж. $13^5/_7$ вершк.

$^3/_4$ сажени превращаемъ въ составное именованное число:

$^3/_4\times3=^9/_4=2^1/_4$ (арш.), $^1/_4\times16=4$ (вершк.).

Слѣд., $15^3/_4$ саж $=15$ саж. 2 арш. 4 вершк.

Теперь сложимъ, какъ складываются цѣлыя составныя именованныя числа:

	214 саж.		$13^5/_7$	вершка.
$+$ 2 версты	15 „	2 арш.	4	„
	101 „	1 „	$2^1/_2$	„
2 версты	330 саж.	3 арш.	$20^3/_{14}$	вершка.
2 версты	331 саж.	1 арш.	$4^3/_{14}$	вершка.

Можно было бы выразить всѣ данныя въ вершкахъ или иныхъ мѣрахъ одного и того же названія и потомъ складывать, какъ дроби отвлеченныя. Полученное отъ сложенія простое именованное число можно было бы, въ случаѣ надобности, обратить въ составное.

2) Умножить 4 пуда $6^2/_3$ фунта на $^4/_7$.

Чтобы умножить какое-нибудь число на $^4/_7$, надо умножить это число на 4 и результатъ раздѣлить на 7:

4 п. $6^2/_3$ ф.
$\times 4$

16 п. $26^2/_3$ ф. | 7

14 — 2 п. $\frac{320}{21}$ ф. $=$ 2 пуда $15^5/_{21}$ ф.

2
$\times 40$

80
$+26^2/_3$

$106^2/_3 = \frac{320}{3}$

3) Раздѣлить 2 стопы $12^1/_2$ дест. на $2^5/_8$ дести.

Обращаемъ оба данныя числа въ дести:

$2 \times 20 = 40$ (дест.); $40 + 12^1/_2 = 52^1/_2$ (дести).

Теперь производимъ дѣленіе:

$$52^1/_2 : 2^5/_8 = \frac{105}{2} : \frac{21}{8} = \frac{105 \cdot 8}{21 \cdot 2} = 20 \text{ (разъ)}.$$

4) Раздѣлить 5 боч. $7^3/_4$ ведра на $^2/_3$.

Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на $^2/_3$, надо умножить это число на 3 и результатъ раздѣлить на 2:

5 боч. $7^3/_4$ ведра
$\times 3$

15 боч. $23^1/_4$ ведра | 2

1 — 7 боч. $\frac{253}{8}$ в. $=$ 7 боч. $31^5/_8$ в.

$\times 40$

40
$+23^1/_4$

$63^1/_4 = \frac{253}{4}$

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Десятичныя дроби

(десятичныя числа).

I. Главнѣйшія свойства десятичныхъ дробей.

182. Десятичныя доли. Доли, получаемыя отъ раздѣленія какой-нибудь единицы на 10, на 100, на 1000, вообще на такое число равныхъ частей, которое выражается 1-ею съ однимъ или съ нѣсколькими нулями, называются **десятичными** долями.

Такимъ образомъ, десятичныя доли, послѣдовательно уменьшающіяся, будутъ слѣдующія:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000} \text{ и т. д.}$$

Изъ двухъ неодинаковыхъ десятичныхъ долей бо́льшая называется десятичною долею **высшаго** разряда, а меньшая—десятичною долею **низшаго** разряда. Каждая десятичная доля содержитъ въ себѣ 10 десятичныхъ долей слѣдующаго низшаго разряда. Такъ:

$$\frac{1}{10}=\frac{10}{100}; \frac{1}{100}=\frac{10}{1000}; \frac{1}{1000}=\frac{10}{10000} \text{ и т. д.}$$

183. Десятичная дробь. Дробь, у которой знаменатель есть 1 съ однимъ или съ нѣсколькими нулями, наз **десятичной**; таковы, напр., дроби:

$$\frac{3}{10}, \frac{27}{100}, \frac{27401}{1000}, 3\frac{1}{1000} \text{ и т. п.}$$

Въ отличіе отъ десятичныхъ дроби, имѣющія какихъ-угодно знаменателей, наз. **обыкновенными.**

Десятичныя дроби представляютъ много удобствъ сравнительно съ обыкновенными Поэтому свойства ихъ и дѣйствія надъ ними полезно разсмотрѣть особо отъ дробей обыкновенныхъ.

184. Десятичное число. Въ цыферномъ изображеніи цѣлаго числа изъ двухъ рядовъ стоящихъ цыфръ правая всегда означаетъ единицы, въ 10 разъ меньшія, нежели лѣвая. Условимся распространить это значеніе мѣстъ и на тѣ цыфры, которыя могутъ быть написаны вправо отъ простыхъ единицъ. Положимъ. напр., что въ такомъ изображеніи:

6 3, 4 8 2 5 9...

цыфра 3 означаетъ простыя единицы. Тогда цыфра 4 означаетъ единицы, въ 10 разъ меньшія, нежели простыя единицы, т.-е. десятыя доли; 8 означаетъ сотыя доли, 2—тысячныя, 5—десятитысячныя, 9—стотысячныя и т. д. Чтобы не ошибиться въ значеніи мѣстъ, условимся отдѣлять запятою цѣлое число отъ десятичныхъ долей. На мѣста недостающихъ долей, а также и на мѣсто цѣлаго числа, когда его нѣтъ, будемъ ставить нули. Напр., при такихъ условіяхъ выраженіе 0,0203 означаетъ: 2 сотыхъ 3 десятитысячныхъ.

Цыфры, стоящія направо отъ запятой, называются **десятичными знаками.**

Число, написанное при помощи десятичныхъ знаковъ (и цѣлаго числа, если оно есть), принято называть **десятичнымъ числомъ.**

185. Изображеніе десятичной дроби безъ знаменателя. Всякую десятичную дробь мы можемъ написать безъ знаменателя, въ видѣ десятичнаго числа. Пусть, напр., дана десятичная дробь $\frac{32730}{1000}$. Сначала исклю-

чимъ изъ нея цѣлое число; получимъ $32\frac{736}{1000}$. Теперь представимъ ее такъ:

$$\frac{32736}{1000}=32+\frac{700}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{6}{1000}=32+\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{6}{1000}.$$

Значитъ, дробь эту можно изобразить такимъ образомъ:

$$\frac{32736}{1000}=32,736$$

Это легко провѣрить, раздробивъ въ десятичномъ числѣ 32,736 цѣлыя единицы и всѣ десятичныя доли въ доли самыя мелкія (въ тысячныя), что проще всего сдѣлать такъ: такъ какъ цѣлая единица содержитъ въ себѣ 10 десятыхъ, то 32 цѣлыхъ составляютъ 320 десятыхъ; приложивъ къ нимъ 7 десятыхъ, получимъ 327 десятыхъ. Такъ какъ десятая доля содержитъ въ себѣ 10 сотыхъ, то 327 десятыхъ составляютъ 3270 сотыхъ; приложивъ къ нимъ 3 сотыхъ, получимъ 3273 сотыхъ. Такъ какъ 1 сотая=10 тысячнымъ, то 3273 сотыхъ=32730 тысячныхъ; приложивъ къ этому числу еще 6 тысячныхъ, получимъ данную дробь 32736 тысячныхъ.

Пусть еще дана десятичная дробь $\frac{578}{100000}$, въ которой нѣтъ цѣлаго числа. Представимъ ее такъ:

$$\frac{578}{100000}=\frac{500}{100000}+\frac{70}{100000}+\frac{8}{100000}=$$
$$=\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{8}{100000}.$$

Слѣд., дробь эта изобразится такимъ образомъ:

$$\frac{578}{100000}=0,00578.$$

Правило. Чтобы десятичную дробь написать безъ знаменателя, пишутъ ея числителя и отдѣляютъ въ немъ запятою съ правой стороны столько десятичныхъ знаковъ,

сколько есть нулей въ знаменателѣ (для чего иногда съ лѣвой стороны числителя приходится написать нѣсколько нулей).

Въ послѣдующемъ изложеніи мы всегда будемъ предполагать (если не будетъ сдѣлано особой оговорки), что десятичная дробь изображена безъ знаменателя, въ видѣ десятичнаго числа.

Замѣчаніе. Приписываніе нулей справа или слѣва десятичнаго числа не измѣняетъ его величины. Напр., каждое изъ чиселъ:

7,05 7,0500 007,05

выражаетъ одно и то же число: 7 цѣлыхъ, 5 сотыхъ, такъ какъ 500 десятитысячныхъ равно 5 сотымъ, а 007 выражаетъ просто 7.

186. Какъ читается десятичная дробь.

Сначала прочитываютъ цѣлое число (а когда его нѣтъ, то говорятъ: „нуль цѣлыхъ"); затѣмъ читаютъ число, написанное послѣ запятой, какъ бы оно было цѣлое и прибавляютъ названіе тѣхъ долей, которыми десятичное изображеніе дроби оканчивается; напр., 0,00378 читается: 0 цѣлыхъ 378 стотысячныхъ. Значитъ, десятичная дробь, написанная безъ знаменателя, прочитывается такъ, какъ если бы она была изображена при помощи числителя и знаменателя.

Впрочемъ, десятичную дробь, у которой очень много десятичныхъ знаковъ, предпочитаютъ читать иначе: разбиваютъ всѣ десятичные знаки, начиная отъ запятой, на грани, по 3 знака въ каждой грани (кромѣ послѣдней, въ которой можетъ быть одинъ и два знака); затѣмъ читаютъ каждую грань, какъ цѣлое число, добавляя къ названію числа первой грани слово „тысячныхъ", второй грани—„милліонныхъ", третьей—„билліонныхъ" и т. д.; къ названію числа послѣдней грани добавляютъ названіе долей выражаемыхъ послѣднею цыфрою дроби. Такимъ образомъ

дробь: 0,028 306 000 07 читается такъ: 0 цѣлыхъ, 28 тысячныхъ, 306 милліонныхъ, 0 билліонныхъ, 7 стобилліонныхъ.

187. Сравненіе десятичныхъ дробей. Пусть желаемъ узнать, какая изъ слѣдующихъ дробей больше:

0,735 и 0,7349987.

Для этого къ дроби, у которой десятичныхъ знаковъ меньше, припишемъ, (хотя бы только мысленно) съ правой стороны столько нулей, чтобы число десятичныхъ знаковъ въ обѣихъ дробяхъ оказалось одно и то же:

0,7350000, 0,7349987.

Теперь видимъ, что первая дробь содержитъ 7 350 000 десятимилліонныхъ, а вторая — 7 349 987 десятимилліонныхъ (значитъ, уравнивая числа десятичныхъ знаковъ мы привели обѣ дроби къ одному знаменателю), такъ какъ 7350000 больше 7349987, то первая дробь больше второй.

Подобнымъ образомъ легко убѣдиться, что **изъ двухъ десятичныхъ дробей та больше, у которыхъ число цѣлыхъ больше; при равенствѣ цѣлыхъ — у которой число десятыхъ больше; при равенствѣ цѣлыхъ и десятыхъ — у которой число сотыхъ больше, и т. д**

188. Перенесеніе запятой. Перенесемъ въ дроби 3,274 запятую на одинъ знакъ вправо; тогда получимъ новую дробь: 32,74. Въ первой дроби цыфра 3 означаетъ простыя единицы, а во второй—десятки; слѣд., значеніе ея увеличилось въ 10 разъ. Цыфра 2 означаетъ въ первой дроби десятыя доли, а во второй—простыя единицы; слѣд., ея значеніе тоже увеличилось въ 10 разъ. Также увидимъ, что значеніе и прочихъ цыфръ увеличилось въ 10 разъ. Такимъ образомъ:

отъ перенесенія запятой вправо на одинъ знакъ десятичная дробь увеличивается въ 10 разъ.

Отсюда слѣдуетъ, что отъ перенесенія запятой вправо на 2 знака десятичная дробь увеличивается въ 100 разъ, на 3 знака—въ 1000 разъ, и т. д.

Обратно: **отъ перенесенія запятой влѣво на одинъ знакъ десятичная дробь уменьшается въ 10 разъ**, и, слѣд., на 2 знака—въ 100 разъ, на 3 знака—въ 1000 разъ, и т. д.

189. Увеличеніе или уменьшеніе десятичной дроби въ 10, въ 100, въ 1000 и т. д. разъ. Пусть требуется увеличить дробь 0,02 въ 10000 разъ. Для этого достаточно перенести въ ней запятую на 4 знака вправо. Но въ данной дроби имѣется всего два десятичныхъ знака. Чтобы было 4 знака, припишемъ съ правой стороны 2 нуля, отчего величина дроби не измѣнится. Перенеся потомъ запятую на конецъ числа, получимъ цѣлое число 0200 или просто 200.

Пусть требуется уменьшить ту же дробь въ 100 разъ. Для этого достаточно перенести въ ней запятую на 2 знака влѣво. Но въ данной дроби влѣво отъ запятой имѣется только один знакъ. Чтобы было два знака, припишемъ съ лѣвой стороны 2 нуля (одинъ для цѣлаго числа), отчего величина дроби не измѣнится. Перенеся потомъ запятую на два знака влѣво, получимъ 0,0002.

Всякое цѣлое число можно разсматривать, какъ десятичную дробь, у которой вправо отъ запятой стоитъ сколько угодно нулей; поэтому увеличеніе и уменьшеніе цѣлаго числа въ 10 разъ, въ 100 разъ, въ 1000 разъ и т. д. совершаются такъ же, какъ и десятичной дроби. Напр., если уменьшимъ цѣлое число 567,000... въ 100 разъ, то получимъ 5,67.

II. Дѣйствія надъ десятичными дробями.

Сложеніе.

190. Сложеніе десятичныхъ дробей производится такъ же, какъ и сложеніе цѣлыхъ чиселъ. Пусть, напр., требуется сложить: 2,078 + 0,75 + 13,5602. Подпишемъ эти дроби другъ подъ другомъ такъ, чтобы цѣлыя стояли подъ цѣлыми, десятыя подъ десятыми, сотыя подъ сотыми и т. д.:

$$\begin{array}{r} 2{,}078 \\ +\ 0{,}75 \\ 13{,}5602 \\ \hline 16{,}3882 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}0780 \\ +\ 0{,}7500 \\ 13{,}5602 \\ \hline 16{,}3882 \end{array}$$

Начинаемъ сложеніе съ наименьшихъ долей. Отъ сложенія десятитысячныхъ получимъ 2; пишемъ эту цыфру подъ чертою. Отъ сложенія тысячныхъ получимъ 8; пишемъ 8 подъ чертою. Отъ сложенія сотыхъ получимъ 18; но 18 сотыхъ = 10 сотыхъ + 8 сотыхъ; десять сотыхъ составляютъ одну десятую; запомнимъ ее, чтобы приложить къ десятымъ долямъ слагаемыхъ, а 8 сотыхъ напишемъ подъ чертой. Продолжаемъ такъ дѣйствіе до конца.

Чтобы не ошибиться при подписываніи, полезно уравнять нулями числа десятичныхъ знаковъ во всѣхъ слагаемыхъ (какъ это сдѣлано у насъ при вторичномъ сложеніи).

Вычитаніе.

191. Вычитаніе десятичныхъ дробей производится такъ же, какъ и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ. Пусть, напр., требуется вычесть:

$$\begin{array}{r} -\ 5{,}709 \\ 0{,}30785 \\ \hline 5{,}40115 \end{array}$$

Подпишемъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы одного названія стояли другъ подъ другомъ. Чтобы вычесть послѣднія двѣ цыфры вычитаемаго, возьмемъ изъ 9 тысячныхъ 1 тысячную и раздробимъ ее въ десятитысячныя; получимъ 10 десятитысячныхъ. Изъ нихъ возьмемъ одну и раздробимъ ее въ стотысячныя; тогда вмѣсто 10 десятитысячныхъ получимъ 9 десятитысячныхъ и 10 стотысячныхъ. Значитъ, цыфру 5 вычитаемаго надо вычесть изъ 10, цыфру 8—изъ 9, а цыфру 7—изъ 8.

Такъ же производится вычитаніе десятичной дроби изъ цѣлаго числа; напр.:

$$\begin{array}{r} -\ 3 \\ 1{,}873 \\ \hline 1{,}127 \end{array}$$

Беремъ отъ 3 единицъ одну и раздробляемъ ее въ десятыя; отъ нихъ беремъ одну и раздробляемъ ее въ сотыя; отъ сотыхъ беремъ 1 сотую и раздробляемъ ее въ тысячныя. Отъ этого вмѣсто 3 цѣлыхъ получимъ 2 цѣлыхъ, 9 десятыхъ, 9 сотыхъ и 10 тысячныхъ. Значитъ, цыфру 3 вычитаемаго придется вычесть изъ 10, цыфры 7 и 8—изъ 9, а цыфру 1—изъ 2.

Можно также предварительно уравнять нулями числа десятичныхъ знаковъ въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ и затѣмъ производить вычитаніе:

$$\begin{array}{r} -\ 5{,}70900 \\ 0{,}30785 \\ \hline 5{,}40115 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 3{,}000 \\ 1{,}873 \\ \hline 1{,}127 \end{array}$$

Умноженіе.

192. Разсмотримъ два случая, первый — когда **одинъ изъ сомножителей цѣлое число**, второй—когда **оба сомножителя дроби.**

Примѣръ 1. 3,085×23. **Примѣръ 2.** 8,375×2,56.

Если бы въ этихъ примѣрахъ мы изобразили десятичныя дроби при помощи числителя и знаменателя и про-

извели дѣйствіе по правилу умноженія обыкновенныхъ дробей, то получили бы:

$$1)\ \frac{3085}{1000}\times 23=\frac{3085\times 23}{1000}=\frac{70955}{1000}=70,955,$$

$$2)\ \frac{8375}{1000}\times\frac{256}{100}=\frac{8375\times 256}{1000\times 100}=\frac{2144000}{100000}=21,44000=21,44.$$

Слѣд., для обоихъ случаевъ мы можемъ вывести слѣдующее общее правило.

Правило. Чтобы умножить десятичныя дроби, отбрасываютъ въ нихъ запятыя, перемножаютъ полученныя цѣлыя числа и въ произведеніи отдѣляютъ запятою съ правой стороны столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ есть во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ.

Дѣйствіе всего лучше располагать такъ:

```
  3,085           8,375
   ×23            ×2,56
 -----           ------
  9255            50250
 6170            41875
 ------         16750
 70,955         -------
                 21,44
```

При этомъ запятыя не отбрасываются, а на нихъ только не обращаютъ вниманія при умноженіи цѣлыхъ чиселъ.

Дѣленіе.

193. Дѣленіе на цѣлое число. Пусть требуется раздѣлить 39,47 на 8. Написавъ десятичную дробь въ видѣ обыкновенной, мы можемъ произвести дѣленіе по правилу дѣленія обыкновенной дроби на цѣлое число:

$$39,47:8=\frac{3947}{100}:8=\frac{3947}{100\ 8}=\frac{3947}{800}.$$

Тогда въ частномъ мы получимъ обыкновенную дробь. Если желательно, чтобы частное было выражено деся-

тичною дробью, то лучше всего производить дѣленіе на цѣлое число такъ, какъ будетъ сейчасъ указано.

194. Приближенное частное. Расположимъ дѣйствіе такъ, какъ оно располагается при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ:

```
39,47 | 8
------|-----
 74   | 4,93
----
  27
----
   3
```

Дѣлимъ 39 цѣлыхъ на 8; получимъ въ частномъ 4 цѣлыхъ, и въ остаткѣ 7 цѣлыхъ. Раздробляемъ остатокъ въ десятыя доли и сносимъ 4 десятыхъ дѣлимаго; получаемъ 74 десятыхъ. Дѣлимъ 74 десятыхъ на 8; получимъ въ частномъ 9 десятыхъ и въ остаткѣ 2 десятыхъ. Раздробляемъ остатокъ въ сотыя доли и сносимъ 7 сотыхъ дѣлимаго; получаемъ 27 сотыхъ. Раздѣливъ ихъ на 8, получаемъ въ частномъ 3 сотыхъ и въ остаткѣ 3 сотыхъ.

Положимъ, что мы на этомъ прекратили дѣйствіе. Тогда получимъ **приближенное частное** 4,93. Чтобы узнать, насколько оно разнится отъ точнаго частнаго, найдемъ это точное частное и сравнимъ его съ приближеннымъ. Чтобы получить точное частное, достаточно къ числу 4,93 приложить дробь, которая получится отъ дѣленія остатка (3 сотыхъ) на 8. Отъ дѣленія 3 единицъ на 8 получимъ $^{3}/_{8}$ единицы; отъ дѣленія 3 сотыхъ на 8 получимъ $^{3}/_{8}$ сотой. Значитъ, точное частное равно суммѣ $4{,}93 + {}^{3}/_{8}$ сотой. Отбросивъ $^{3}/_{8}$ сотой, мы сдѣлаемъ ошибку, которая меньше одной сотой. Поэтому говорятъ, что 4,93 есть приближенное частное **съ точностью до** $^{1}/_{100}$. Если вмѣсто того, чтобы отбрасывать $^{3}/_{8}$ сотой, мы дополнимъ эту дробь до цѣлой сотой (увеличивъ ее на $^{5}/_{8}$ сотой), то сдѣлаемъ ошибку, тоже меньшую $^{1}/_{100}$; тогда получимъ другое приближенное частное: $4{,}93 + 0{,}01$, т.-е. 4,94, тоже съ точностью до $^{1}/_{100}$. Число 4,93 меньше, а 4,94 больше точнаго частнаго; поэтому говорятъ, что первое число есть приближенное частное **съ недостаткомъ**, а второе—**съ избыткомъ**.

Если станемъ продолжать дѣйствіе дальше, обращая остатки въ десятичныя доли, все болѣе и болѣе мелкія, то будемъ получать приближенныя частныя съ большею точностью. Такъ, если обратимъ остатокъ 3 сотыхъ въ тысячныя доли и раздѣлимъ 30 тысячныхъ на 8, то получимъ приближенное частное 4,933 (съ недостаткомъ) или 4,934 (съ избыткомъ), при чемъ ошибка менѣе $^1/_{1000}$.

```
39,47 | 8
 74     4,93375
  27
   30
    60
     40
      0
```

Продолжая дѣленіе далѣе, мы можемъ иногда дойти до остатка 0 (какъ въ нашемъ примѣрѣ); тогда получимъ точное частное. Въ противномъ случаѣ приходится довольствоваться приближеннымъ частнымъ, при чемъ ошибку можно сдѣлать какъ угодно малою. Если, напр., мы желаемъ найти приближенное частное съ точностью до одной милліонной, то прекращаемъ дѣленіе тогда, когда въ частномъ получилась цыфра милліонныхъ долей.

Такъ же поступаютъ при дѣленіи цѣлаго числа на цѣлое, если желаютъ получить частное въ видѣ десятичной дроби.

```
30 | 7
 20  4,2857..
  60
   40
    50
     1
```

Напр., дѣля 30 на 7 и прекративъ дѣленіе на цыфрѣ десятитысячныхъ, мы получимъ приближенное частное 4,2857 (съ нед.) или 4,2858 (съ изб.) съ точностью до $^1/_{10000}$.

Правило. **Дѣленіе десятичной дроби на цѣлое число производится такъ же, какъ и дѣленіе цѣлыхъ чиселъ, при чемъ остатки обращаютъ въ десятичныя доли, все болѣе и болѣе мелкія, и дѣйствіе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока или не получится точное частное, или въ приближенномъ**

частномъ не получится цыфра тѣхъ десятичныхъ долей, которыми хотятъ ограничиться.

195. Замѣчаніе. Изъ двухъ **приближенныхъ частныхъ, одно съ недостаткомъ, а другое съ избыткомъ, какое-нибудь одно точно до $^1/_2$ десятичной доли послѣдняго разряда,** а именно такимъ частнымъ будетъ частное съ недостаткомъ, если остатокъ меньше $^1/_2$ дѣлителя, и частное съ избыткомъ, если остатокъ больше $^1/_2$ дѣлителя. Разсмотримъ, напр., дѣленіе 39,47 : 8. Положимъ, мы беремъ приближенное частное 4,93, при которомъ остатокъ 3 меньше половины дѣлителя (т.-е. меньше 4). Тогда точное частное будетъ $4{,}93 + {}^3/_8$ сотой; значитъ, оно отличается: отъ числа 4,93 на $^3/_8$ сотой (меньше $^1/_2$ сотой), а отъ числа 4,94 на $^5/_8$ сотой (болѣе $^1/_2$ сотой) (въ этомъ случаѣ, значитъ, выгоднѣе взять частное съ недостаткомъ).

```
39,47 | 8
 74   | 4,93
  27
   3
```

```
39,47 | 8
 74   | 4,933
  27
   30
    6
```

Возьмемъ теперь въ томъ же примѣрѣ приближенное частное 4,933, при которомъ остатокъ 6 больше половины дѣлителя. Точное частное будетъ $4{,}933 + {}^6/_8$ тысячной; значитъ, оно отличается отъ числа 4,933 на $^6/_8$ тысячной (болѣе $^1/_2$ тысячной), а отъ числа 4,934 на $^2/_8$ тысячной (менѣе $^1/_2$ тысячной) (въ этомъ случаѣ, значитъ, выгоднѣе взять частное съ избыткомъ).

196. Дѣленіе на десятичную дробь. Пусть требуется раздѣлить 3,753 на 0,85. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на $^{85}/_{100}$, достаточно это число умножить на 100 и результатъ раздѣлить на 85. Умноживъ дѣлимое на 100, получимъ 375,3. Остается раздѣлить это число на 85. Такимъ образомъ мы приходимъ къ дѣленію десятичной дроби на цѣлое число:

$$375{,}3 : 85 = 4{,}415..$$

Точно такъ же поступаютъ при дѣленіи цѣлаго числа на десятичную дробь; напр.:

$$7:0{,}325=7000:325=21{,}538\ldots$$

Правило. Чтобы раздѣлить на десятичную дробь, отбрасываютъ въ дѣлителѣ запятую и увеличиваютъ дѣлимое во столько разъ, во сколько увеличился дѣлитель; затѣмъ дѣлятъ по правилу дѣленія на цѣлое число.

III. Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

197. Предварительное замѣчаніе. Такъ какъ дѣйствія надъ десятичными дробями производятся проще, чѣмъ надъ дробями обыкновенными, то часто бываетъ полезно обыкновенныя дроби обратить въ десятичныя *). Укажемъ два способа такого обращенія.

198. Первый способъ: посредствомъ разложенія знаменателя на простыхъ множителей. Пусть требуется обратить дробь $^7/_{40}$ въ десятичную. Для этого зададимся вопросомъ: нельзя ли привести дробь $^7/_{40}$ къ такому знаменателю, который выражался бы 1-ю съ нулями? Если бы это оказалось возможнымъ, то мы получили бы тогда десятичную дробь, написанную при помощи числителя и знаменателя, а такую дробь мы затѣмъ не затруднились бы написать и безъ знаменателя.

*) Впрочемъ, при совершеніи вычисленій надъ дробями десятичными и обыкновенными совмѣстно не всегда необходимо приводить эти дроби къ одному виду; если, напр., требуется 0,567 умножить на $^3/_7$, то нѣтъ надобности обращать $^3/_7$ въ десятичную дробь; можно 0,567 умножить на 3 и результатъ раздѣлить на 7.

Чтобы привести несократимую дробь къ другому знаменателю, надо оба ея члена умножить на одно и то же число. Чтобы узнать, на какое число надо умножить 40 для полученія 1 съ нулями, примемъ во вниманіе, что **всякое число, выражаемое единицею съ нулями, разлагается только на множителей 2 и 5, причемъ оба эти множителя входятъ въ разложеніе одинаковое число разъ, именно столько разъ, сколько стоитъ нулей при 1.** Напр.:

$$1000=10.10.10=2.5.2.5\ 2.5$$
$$10000=10.10.10.10=2.5.2.5.2.5.2.5 \text{ и т. п.}$$

Замѣтивъ это, разложимъ 40 на простыхъ множителей:

$$40=2.2.2.5.$$

Изъ этого разложенія видимъ, что если умножить 40 два раза на 5, то послѣ умноженія получится такое число, въ которое 2 и 5 будутъ входить множителями одинаковое число разъ (по 3 раза); значитъ, тогда получится 1 съ нулями (съ 3 нулями). Чтобы дробь не измѣнила своей величины, надо и числителя ея умножить 2 раза на 5:

$$\frac{7}{40}=\frac{7.5.5}{40.5.5}=\frac{175}{1000}=0{,}175.$$

Примѣры: 1) $\frac{7}{8}=\frac{7}{2.2.2}=\frac{7.5.5.5}{2.2.2.5.5.5}=\frac{875}{1000}=0{,}875;$

2) $\frac{4}{125}=\frac{4}{5.5.5}=\frac{4.2.2.2}{5.5.5.2\ 2.2}=\frac{32}{1000}=0{,}032;$

3) $\frac{11}{20}=\frac{11}{2.2.5}=\frac{11.5}{2.2.5.5}=\frac{55}{100}=0{,}55.$

198,а. Какія обыкновенныя дроби обращаются въ десятичныя и какія не обращаются. Изъ указаннаго способа обращенія обыкновенныхъ дрбей въ десятичныя можно вывести слѣдующія два слѣдствія:

1) **Если знаменатель обыкновенной дроби не содержитъ никакихъ иныхъ множителей, кромѣ 2 и 5, то такая дробь**

обращается въ десятичную, причемъ эта десятичная дробь имѣетъ столько десятичныхъ знаковъ, сколько разъ въ знаменателѣ обыкновенной дроби, послѣ сокращенія ея, повторяется тотъ изъ множителей 2 и 5, который входитъ въ него большее число разъ.

Пусть, напр., въ знаменателѣ обыкновенной дроби, послѣ ея сокращенія, больше повторяется множитель 2 и пусть этотъ множитель входитъ 4 раза. Тогда придется добавлять множителя 5, и столько разъ, чтобы послѣ добавленія оба множителя входили по 4 раза; значитъ, послѣ умноженія въ знаменателѣ получится 1 съ 4-мя нулями, а потому и десятичная дробь будетъ имѣть 4 десятичные знака. Напр.:

$$\frac{7}{80}=\frac{7}{2.2.2.2.5}=\frac{7.5.5.5}{80.5.5.5}=\frac{875}{10000}=0{,}0875.$$

2) **Если знаменатель обыкновенной дроби содержитъ въ себѣ какихъ-либо множителей, отличающихся отъ 2 и 5, и эти множители не сокращаются съ числителемъ, то такая дробь не обращается въ десятичную.**

Возьмемъ, напр., дробь $^{35}/_{84}$, въ которой знаменатель содержитъ множителей 3 и 7 (именно 84=2 . 2 . 3 . 7). Посмотримъ прежде всего, не сокращаются ли эти множители съ числителемъ. Одинъ изъ нихъ, именно 7, сокращается; послѣ сокращенія получимъ $^{5}/_{12}$. Такъ какъ 12 содержитъ множителя 3, то эта дробь не обращается въ десятичную, потому что, на какія бы цѣлыя числа мы ни умножали знаменателя ея, никогда не получимъ 1 съ нулями.

Такія дроби можно обращать лишь въ п р и б л и ж е н н ы я д е с я т и ч н ы я, какъ сейчасъ увидимъ.

199. Второй способъ: посредствомъ дѣленія числителя на знаменателя. Этотъ способъ болѣе употребителенъ, чѣмъ первый, такъ какъ онъ примѣнимъ и къ такимъ обыкновеннымъ дробямъ, которыя обращаются только въ приближенныя десятичныя дроби.

Пусть требуется обратить дробь $^{23}/_8$ въ десятичную.

23	8
70	2,875
60	
40	
0	

Число $^{23}/_8$ можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія 23 на 8 (§ 173, прав. 1-е). Но мы видѣли, что частное отъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ можно найти въ видѣ десятичной дроби, точно или приближенно. Для этого надо только обращать остатки отъ дѣленія въ десятичныя доли, все болѣе и болѣе мелкія, до тѣхъ поръ, пока не получится въ остаткѣ нуль, или пока не получатся въ частномъ доли того разряда, дальше котораго не желаютъ итти. Въ нашемъ примѣрѣ получилось точное частное; слѣд., $^{23}/_8=2,875$.

Пусть еще требуется обратить $^3/_{14}$ въ десятичную дробь Такъ какъ эта дробь несократима и знаменатель ея содержитъ простого множителя 7, отличнаго отъ 2 и 5, то ее нельзя обратить въ десятичную; однако, можно найти такую десятичную дробь, которая приблизительно равняется $^3/_{14}$ и притомъ съ какою угодно точностью. Если, напр., мы желаемъ найти десятичную дробь, которая отличалась бы отъ $^3/_{14}$ менѣе, чѣмъ на $^1/_{1000}$, то достаточно найти 3 десятичные знака отъ дѣленія 3 на 14:

30	14
20	0,214...
60	
4	

Приближенное частное 0,214 или 0,215 отличается отъ точнаго частнаго, т.-е. отъ $^3/_{14}$, менѣе, чѣмъ на $^1/_{1000}$ Если продолжать дѣленіе дальше, то степень приближенія становится все больше и больше. Однако дѣленіе никогда не можетъ окончиться, потому что въ противномъ случаѣ мы получили бы десятичную дробь, которая въ точности равнялась бы $^3/_{14}$, что невозможно; такимъ образомъ, продолжая дѣленіе. мы можемъ получить въ частномъ сколько угодно десятичныхъ знаковъ.

200. Конечныя и безконечныя десятичныя дроби. Десятичная дробь, у которой число деся-

тичныхъ знаковъ можетъ быть какъ угодно велико, наз. **безконечною**, а та, у которой число десятичныхъ знаковъ опредѣленное, наз. **конечною** дробью.

Можно сказать, что обыкновенная дробь, которая не можетъ обратиться въ конечную десятичную, обращается въ безконечную десятичную.

201. Періодическія дроби. Безконечная десятичная дробь, у которой одна или нѣсколько цыфръ неизмѣнно повторяются въ одной и той же послѣдовательности, называется **періодическою** десятичною дробью, а совокупность повторяющихся цыфръ называется **періодомъ** этой дроби.

Періодическія дроби бываютъ **чистыя** и **смѣшанныя.** Чистою періодическою дробью называется такая, у которой періодъ начинается тотчасъ послѣ запятой, напр.: 2,36 36 36.....; смѣшанною—такая, у которой между запятой и первымъ періодомъ есть одна или нѣсколько цыфръ не повторяющихся, напр.: 0,5 23 23 23..... Періодическія дроби пишутъ сокращенно такъ:

вмѣсто 2, 36 36..... пишутъ: 2,(36)
» 0, 5 23 23 . » 0,5(23)

202. Безконечная десятичная дробь, получающаяся при обращеніи обыкновенной дроби, должна быть періодическою. Убѣдимся въ этомъ свойствѣ на какомъ-нибудь примѣрѣ. Пусть желаемъ обратить дробь $^{19}/_{7}$ въ десятичную. Такъ какъ знаменатель 7 не составленъ изъ множителей 2 и 5 и данная дробь несократима, то она не можетъ обратиться въ конечную десятичную. Слѣд., она обращается въ безконечную десятичную. Чтобы получить нѣсколько ея первыхъ десятичныхъ знаковъ, станемъ дѣлить 19 на 7. Такъ какъ дѣленіе не можетъ окончиться, то *всевозможныхъ* остатковъ должно быть безконечно много.

Но остатки всегда меньше дѣлителя; поэтому различныхъ остатковъ не можетъ быть больше 6 слѣдующихъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Изъ этого слѣдуетъ, что при достаточномъ продолженіи дѣленія остатки непремѣнно начнутъ повторяться. Дѣйствительно, 7-й остатокъ оказался такой же, какъ и первый. Но если повторился остатокъ, то, приписавъ къ нему 0, мы получимъ такое же дѣлимое, какое было раньше (50); значитъ, въ частномъ начнутъ получаться тѣ же цыфры какія были раньше, т.-е. въ частномъ получится періодическая дробь. Въ нашемъ примѣрѣ повтореніе началось съ первой цыфры послѣ запятой и потому получилась чистая періодическая дробь. Въ другихъ примѣрахъ можетъ случаться, что повтореніе начнется не съ 1-й цыфры, а, напр., съ 3-й; тогда получится смѣшанная періодическая дробь.

```
19 | 7
 50  2,71428571
  10
   30
    20
     60
      40
       50
        10
         3
```

203*. Обыкновенная дробь, обращающаяся въ безконечную десятичную, есть предѣлъ этой десятичной Пусть, напр., мы нашли, что отъ обращенія обыкновенной дроби $^3/_{14}$ получилась такая десятичная безконечная дробь; 0,214285... Тогда мы можемъ утверждать (§ 199), что:

число 0,2 разнится отъ $^3/_{14}$ менѣе, чѣмъ на $^1/_{10}$,
» 0,21 » » » » » » $^1/_{100}$
» 0,214 » » » » » » $^1/_{1000}$ и т. д.;

значитъ, разность

$$^3/_{14}-0,214285...$$

при неограниченномъ увеличеніи числа десятичныхъ знаковъ въ вычитаемомъ дѣлается и остается меньше какого угодно

малаго данаго числа; а это, согласно опредѣленію предѣла *), означаетъ, что

$$^3/_{14} = \text{предѣлъ } 0{,}214285\ldots$$

Обыкновенно въ подобныхъ равенствахъ слово „предѣлъ" опускаютъ и пишутъ просто:

$$^3/_{14} = 0{,}214285\ldots$$

284*. Предѣлъ данной періодической дроби (т.-е. та обыкновенная дробь, которая обращается въ эту періодическую дробь) всего проще находится при помощи выводимой въ алгебрѣ формулы для предѣла суммы членовъ геометрической убывающей безконечной прогрессіи. Примѣняя эту формулу къ періодическимъ дробямъ **), легко получить слѣдующія 2 правила:

Правило 1-е. Чтобы обратить чистую періодическую дробь въ обыкновенную, берутъ ея періодъ числителемъ, а знаменателемъ пишутъ цыфру 9 столько разъ, сколько цыфръ въ періодѣ.

Примѣры: $0{,}(7) = \frac{7}{9}$; $2{,}(05) = 2\frac{5}{99}$; $0{,}(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

Правило 2-е. Чтобы обратить смѣшанную періодическую дробь въ обыкновенную, изъ числа, стоящаго до второго періода, вычитаютъ число, стоящее до перваго періода, и полученную разность берутъ числителемъ, а знаменателемъ пишутъ цыфру 9 столько разъ, сколько цыфръ въ періодѣ, со столькими нулями на концѣ, сколько цыфръ между запятой и періодомъ.

Примѣры: 1) $0{,}35252\ldots = \frac{352-3}{990} = \frac{349}{990}$

2) $0{,}26444\ldots = \frac{264-26}{900} = \frac{238}{900} = \frac{119}{450}$

3) $5{,}7888\ldots = 5\frac{78-7}{90} = 5\frac{71}{90}$

или $5{,}7888\ldots = \frac{5788-578}{90}$ ...

*) См. напр., „Элементарную геометрію" А. Киселева, § 279.

**) См. Элементарную алгебру А. Киселева, § 286, примѣры 3 и 4.

205'. Замѣчанія. 1) **Знаменатель обыкновенной дроби, получаемой отъ обращенія чистой періодической, не содержитъ множителей 2 и 5.**

Дѣйствительно, этотъ знаменатель до сокращенія оканчивается цыфрою 9 и потому не дѣлится ни на 2, ни на 5; слѣд., онъ не дѣлится на эти числа и послѣ сокращенія дроби (если сокращеніе возможно).

2) **Знаменатель обыкновенной дроби, получаемой отъ обращенія смѣшанной періодической, содержитъ множителя 2 или 5, или и того, и другого.**

Дѣйствительно, этотъ знаменатель до сокращенія оканчивается нулемъ и потому дѣлится и на 2, и на 5. Оба эти множителя могли бы сократиться съ числителемъ только тогда, если бы числитель оканчивался тоже нулемъ. Но числитель получается отъ вычитанія числа, стоящаго до перваго періода, изъ числа, стоящаго до второго періода; такъ какъ послѣдняя цыфра періода не можетъ оказаться одинаковою съ послѣднею цыфрою до періода (если періодъ взятъ вѣрно), то числитель не можетъ оканчиваться нулемъ; поэтому и послѣ *сокращенія (если оно возможно) въ знаменателѣ* останется множитель 2 или 5, или и тотъ, и другой вмѣстѣ.

206'. Обыкновенная дробь, знаменатель которой не содержитъ множителей 2 и 5, обращается въ чистую періодическую.

$$\text{Напр.: } \frac{3}{7} = 0,\ (428571); \frac{2}{3} = 0,\ (6);\ \frac{5}{11} = 0,\ (45).$$

Дѣйствительно, во-1) такая дробь должна обратиться въ какую-нибудь періодическую (§ 202); во-2) эта періодическая дробь не можетъ быть смѣшанною, потому что смѣшанная періодическая дробь, какъ мы видѣли, обращается въ такую обыкновенную дробь, знаменатель которой содержитъ множителей 2 и 5. Слѣд., она должна обратиться въ чистую періодическую.

207'. Обыкновенная дробь, знаменатель которой, послѣ сокращенія, вмѣстѣ съ другими множителями, содержитъ

множителя 2 или 5, обращается въ смѣшанную періодическую.

Напр.: $\frac{35}{42}=\frac{5}{6}=0,8(3)$; $\frac{8}{15}=0,5(3)$; $\frac{119}{450}=0,26(4)$ и т. д.

Дѣйствительно, во-1) такая дробь должна обратиться въ какую-нибудь періодическую; во-2) эта періодическая дробь не можетъ быть чистою, потому что чистая періодическая дробь, какъ мы видѣли, происходитъ отъ такой обыкновенной, знаменатель которой не содержитъ множителей 2 и 5. Слѣд., она должна обратиться въ смѣшанную періодическую.

208*. Безконечныя десятичныя дроби не-періодическія. Безконечныя десятичныя дроби могутъ быть и не-періодическими (таковы, напр., десятичныя дроби, выражающія ирраціональныя числа, какъ $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ и пр.). Точныя величины такихъ дробей служатъ предѣлами, къ которымъ дроби стремятся при неограниченномъ увеличеніи числа ихъ десятичныхъ знаковъ.

Полезно убѣдиться, что къ безконечнымъ десятичнымъ дробямъ, періодическимъ и не-періодическимъ, примѣнимъ (за малымъ исключеніемъ, которое будетъ указано ниже) тотъ признакъ неравенства десятичныхъ дробей, который былъ изложенъ нами раньше (§ 187) для дробей конечныхъ, а именно: «изъ двухъ десятичныхъ дробей та больше, у которой число цѣлыхъ больше; при равенствѣ цѣлыхъ—у которой число десятыхъ больше, при равенствѣ цѣлыхъ и десятыхъ, у которыхъ число сотыхъ больше, и т. д.» Сравнимъ, напр., двѣ такія безконечныя десятичныя дроби:

$$0,325796\ldots \text{ и } 0,326023\ldots$$

— у которыхъ число цѣлыхъ, десятыхъ и сотыхъ одно и то же, но число тысячныхъ въ первой дроби меньше числа тысячныхъ во второй (хотя бы на 1). Обозначимъ точныя величины этихъ дробей соотвѣтственно буквами a и b; тогда мы можемъ написать:

$$\text{пред. } 0,325796\ldots = a \text{ и пред. } 0,326023\ldots = b.$$

Убѣдимся, что $a<b$. Очевидно, что $0,326<b$, и потому, если мы покажемъ, что $a<0,326$, то тогда и подавно будетъ: $a<b$. Такъ какъ, согласно теоремѣ 2-й предыдущаго параграфа,

$$\text{пред. } 0,00099\ldots = \frac{9-0}{9000} = \frac{9}{9000} = \frac{1}{1000} = 0,001,$$

то дробь 0,326 можно представить такъ:

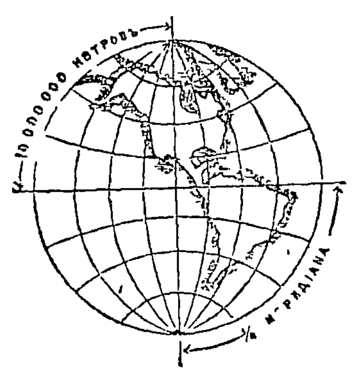
$$0,326 = 0,325 + 0,001 = 0,325 + \text{пред. } 0,00099\ldots$$
$$= \text{пред. } 0,325999\ldots$$

Сравнивая теперь перемѣнныя числа 0,325796... и 0,325999..., видимъ, что первое всегда остается меньшимъ второго на число, превосходящее 2 тысячныхъ; поэтому предѣлъ перваго числа долженъ быть меньше предѣла второго числа, т.-е. $a<0,326$ и, значитъ, $a<b$.

Исключеніе изъ этого признака сравненія десятичныхъ дробей представляютъ собою нѣкоторые случаи, когда конечная десятичная дробь сравнивается съ такой безконечной періодической дробью, у которой періодъ состоитъ изъ цыфры 9. Такъ дробь 0,326 не больше, а равна дроби 0,325999...

IV. Метрическая система мѣръ.

209. Описаніе. Изъ системъ именованныхъ мѣръ, употребляемыхъ въ другихъ государствахъ, особенно замѣчательна своею простотою французская или **метрическая** система мѣръ, принятая во многихъ странахъ.



За единицу длины въ этой системѣ принята одна десятимилліонная часть четверти земного меридіана; эта единица называется **«метръ»** *).

---

*) Вслѣдствіе нѣкоторыхъ погрѣшностей при измѣреніи дуги меридіана употребляемый въ практикѣ метръ не вполнѣ равенъ десятимилліонной долѣ четверти меридіана (парижскаго, какъ предполагалось).

Метръ раздѣляется на 10 равныхъ частей, $^1/_{10}$ часть метра — еще на 10 равныхъ частей, $^1/_{100}$ метра, въ свою очередь, на 10 равныхъ частей, и т. д. Съ другой стороны, употребляются мѣры въ 10 метровъ, въ 100 метровъ и т. д. Чтобы назвать десятичныя подраздѣленія метра, присоединяютъ къ слову «метръ» латинскія слова: **деци** (для обозначенія $^1/_{10}$), **центи** ($^1/_{100}$), **милли** ($^1/_{1000}$); такъ, дециметръ означаетъ $^1/_{10}$ часть метра, центиметръ — $^1/_{100}$ часть метра, миллиметръ — $^1/_{1000}$ часть метра. Впрочемъ, слово «центиметръ» чаще замѣняется французскимъ словомъ «сантиметръ».

Мѣры, кратныя метра, называются при помощи греческихъ словъ: **дэка** (10), **гекто** (100), **кило** (1000); такъ, декаметръ означаетъ 10 метровъ, гектометръ — 100 метровъ, километръ — 1000 метровъ.

Таблица метрическихъ мѣръ длины:

1 метръ = 10 дециметрамъ = 100 сантиметрамъ = 1000 миллиметрамъ;

10 метровъ = 1 декаметру; 100 метровъ = 1 гектометру. 1000 метровъ = 1 километру.



1 дециметръ, раздѣленный на сантиметры и миллиметры (въ натуральную величину).

Полезно замѣтить слѣдующія приблизительныя соотношенія метрическихъ мѣръ съ русскими:

1 метръ = 22$^1/_2$ вершка = 1,4 аршина = 3$^1/_4$ фута.

1 дюймъ = 2$^1/_2$ сант.: 1 вершокъ = 4$^1/_2$ сант.;

1 футъ = 30$^1/_2$ сант.; 1 километръ почти $^{15}/_{16}$ версты *).

*) Точнѣе: 1 метръ = 22,4971 вершка = 1,4061 арш. = 3,2808 фута: 1 аршинъ = 0,7112 метра.

Названія метрическихъ мѣръ принято сокращенно обозначать такъ:

метръ . . . . . м.
дециметръ . . дцм.
сантиметръ . . см.
миллиметръ. . мм.
километръ. . . км.

Для измѣренія поверхностей употребляются квадратныя мѣры: кв. метръ, кв. декаметръ и т. п. Каждая изъ такихъ мѣръ содержитъ въ себѣ 100 мѣръ слѣдующаго низшаго разряда; такъ, кв. дециметръ содержитъ 100 кв. сантиметровъ.

Для измѣренія площади полей употребляется «аръ» и «**гектаръ**». Аръ есть **квадратный декаметръ**; гектаръ равенъ 100 арамъ. Гектаръ приблизительно равенъ 0,9 нашей десятины *).

Для измѣренія объемовъ служатъ кубическія мѣры: куб. метръ, куб. дециметръ и т. д. Каждая изъ этихъ мѣръ содержитъ въ себѣ 1000 мѣръ слѣдующаго низшаго разряда; такъ, кубическій метръ содержитъ 1000 куб. дециметровъ. Объемъ, равный куб. метру, называется «**стеръ**», если онъ служитъ для измѣренія количества дровъ, угля и т. п.

Для измѣренія вмѣстимости сосудовъ (и объемовъ жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ) употребляется «**литръ**». Литръ есть объемъ, равный одному **кубическому дециметру**. На наши мѣры онъ приблизительно равенъ 0,3 гарнца **). Употребительны также децилитръ и центилитръ, декалитръ и гектолитръ.

Единицею вѣса служитъ «**граммъ**». Это есть (почти точно) **вѣсъ одного кубическаго сантиметра чистой перегнанной воды** при температурѣ 4° Цельсія (или 3,2° Рео-

*) Гектаръ=0,91530 десятины; десятина=1,0925 гект.
**) Литръ=0,3049 гарнца=61,0266 куб. дюйма.

мюра) въ безвоздушномъ пространствѣ. Граммъ подраздѣляется на дециграммы, сантиграммы и миллиграммы; вѣса, кратные грамма, суть: декаграммъ, гектограммъ и килограммъ.

На наши мѣры эти единицы приблизительно составляютъ:

1 граммъ=$22\frac{1}{2}$ доли=около $\frac{1}{4}$ золотника;
1 килограммъ=$2\frac{1}{2}$ фунта (точнѣе: 2,44 фунта);
1 пудъ=16,38 килогр.; 1 фунтъ=$409\frac{1}{2}$ граммамъ *).

Употребительна еще мѣра **«тонна»**, равная 1000 килограммовъ (приблизительно **61 пудъ**) **).

Монетною единицею служитъ **«франкъ»**. Это есть серебряная монета, вѣсящая ровно 5 граммовъ и содержащая приблизительно на 9 частей чистаго серебра 1 часть мѣди. Сотая часть франка называется **«сантимъ»**. На наши деньги **1 франкъ приблизительно равенъ $37\frac{1}{2}$ коп.**

210. Вслѣдствіе того, что единичное отношеніе мѣръ метрической системы равно основанію нашей системы счисленія, **всѣ дѣйствія надъ именованными числами, выраженными по этой системѣ, выполняются проще, чѣмъ по какой-либо другой системѣ.**

Пусть, напр., требуется **раздробить** въ метры 2 килом. 5 гектом. 7 декам. 3 метра 8 децим. 4 сантим. и 6 миллим. Такъ какъ километры это—тысячи метровъ, гектометры—сотни метровъ и т. д., то, очевидно, данное составное именованное число выразится въ метрахъ такъ: 2573,846 метровъ.

---

*) Граммъ = 22 505 долей=0,2344 золотн.; золотн. = 4,2658 грам.
Килограммъ=2,4419 фунта; фунтъ=0,40951241 килогр.

**) Въ настоящее время метрическая система примѣняется также и въ аптекахъ. Нашимъ Торговымъ Уставомъ установлено слѣдующее соотношеніе между мѣрами аптекарскаго вѣса и метрическими:

1 аптек. фунтъ=358,32336 граммамъ;
1 » гранъ=62,208916 миллиграммовъ;
1 килограммъ=2,7907754 аптект. фунта;
1 граммъ =16,074866 аптек. грана.

Переносія въ этой десятичной дроби запятую вправо или влѣво, найдемъ, что: 2573 846 метр.=257,3846 декам.= =25,73846 гектом.=2,573846 килом.=25738,46 децим.= =257384,6 сантим.=2573846 миллим.

Такъ же легко совершается **превращеніе** простого именованнаго числа въ составное. Пусть, напр., требуется превратить 2380746 миллиграммовъ въ мѣры высшихъ разрядовъ. Такъ 'какъ граммъ = 1000 миллигр., то: 2380746 миллигр.=2380,746 грамм.=2 килогр. 3 гектогр. 8 декагр. 7 децигр. 4 сантигр. 6 миллигр.

Дѣйствія надъ метрическими именованными числами совершаются такъ, какъ надъ десятичными дробями.

211. Удобства метрической системы. Изъ сказаннаго о метрической системѣ можно заключить, что она обладаетъ слѣдующими тремя важными удобствами: 1) мѣры различныхъ величинъ находятся въ простой зависимости отъ основной мѣры, м е т р а; 2) единичное отношеніе мѣръ одно и то же для всѣхъ разрядовъ и всѣхъ величинъ (кромѣ, конечно, поверхностей и объемовъ); 3) это единичное отношеніе равно основанію нашей системы счисленія, вслѣдствіе чего дѣйствія надъ именованными числами значительно упрощаются.

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

Отношеніе и пропорція.

I. Отношеніе.

212. Опредѣленіе. Отношеніемъ одного значенія величины къ другому значенію той же величины наз. отвлеченное число, на которое надо умножить второе значеніе, чтобы получить первое.

Такъ, отношеніе длины 15 арш. къ длинѣ 3 арш. есть число 5, потому что 15 арш.=3 арш.×5: отношеніе вѣса 3 фунт. къ вѣсу 15 фунт. есть число $^1/_5$ такъ какъ 3 ф.= =15 ф.×$^1/_5$, отношеніе отвлеченнаго числа 25 къ отвлеченному числу 100 равно $^1/_4$ потому что 25=100×$^1/_4$.

Значенія величины, между которыми разсматривается отношеніе, наз. **членами** отношенія; первое значеніе есть **предыдущій** членъ, второе значеніе—**послѣдующій** членъ.

Когда отношеніе есть цѣлое число, то оно показываетъ, сколько разъ предыдущій членъ содержитъ въ себѣ послѣдующій; такъ, отношеніе 15 арш. къ 3 арш. равно цѣлому числу 5; это значитъ, что 15 арш. содержатъ въ себѣ 3 арш. 5 разъ.

Когда отношеніе есть дробь, то оно означаетъ, какую дробь послѣдующаго члена составляетъ предыдущій; такъ, отношеніе 3 фунт. къ 15 фунт. есть дробь $^1/_5$, это значитъ, что 3 фунта составляютъ $^1/_5$ 15-и фунтовъ.

Изъ того, что предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе, слѣдуетъ, что предыдущій членъ можно разсматривать,—какъ дѣлимое, послѣдующій членъ—какъ дѣлителя (въ смыслѣ множимаго), а отношеніе—какъ частное (въ смыслѣ множителя). Поэтому нахожденіе отношенія принято обозначать знакомъ дѣленія; напр., отношеніе 2 пудовъ къ 10 фунтамъ обозначаютъ такъ:

$$2 \text{ пуда} : 10 \text{ фунт.}, \quad \text{или} \quad \frac{2 \text{ пуда}}{10 \text{ фунтовъ}}.$$

Замѣтимъ, что отношеніе именованныхъ чиселъ всегда можетъ быть замѣнено отношеніемъ отвлеченныхъ чиселъ. Для этого достаточно выразить именованныя числа въ одной и той же мѣрѣ и взять отношеніе получившихся отвлеченныхъ чиселъ. Напр., отношеніе 10 фун. 16 лот. къ 3 лот. равно отношенію 336 лот. къ 3 лот., а это отношеніе равно отношенію отвлеченныхъ чиселъ 336 къ 3.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ большею частью говорить **только** объ отношенія **отвлеченныхъ** чиселъ.

213. Зависимость между членами отношенія и самимъ отношеніемъ. Эта зависимость та же самая, какая существуетъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ. Такъ:

1) Предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе (дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное).

2) Послѣдующій членъ равенъ предыдущему, дѣленному на отношеніе (дѣлитель равенъ дѣлимому, дѣленному на частное).

3) Отношеніе увеличивается (или уменьшается) во столько разъ, во сколько увеличивается (или уменьшается) предыдущій членъ.

4) Отношеніе уменьшается (или увеличивается) во столько

разъ, во сколько увеличивается (или уменьшается) послѣдующій членъ.

5) Отношеніе не измѣняется, если оба члена отношенія увеличены или уменьшены въ одинаковое число разъ.

214. Нахожденіе неизвѣстнаго члена отношенія. Если въ отношеніи неизвѣстенъ предыдущій членъ, то онъ находится умноженіемъ (зависимость 1); если же неизвѣстенъ послѣдующій, то онъ получается дѣленіемъ (завис. 2); напр. (неизвѣстный членъ обозначенъ буквой x):

$$1)\ x : 7^1/_2 = 2;\ \text{отсюда:}\ x = 7^1/_2 \times 2 = 15.$$
$$2)\ 15 : x = 2;\ \quad \text{»} \quad x = 15 : 2 = 7^1/_2.$$

215. Сокращеніе отношенія. Если оба члена отношенія дѣлятся на одно и то же число, то мы можемъ сократить ихъ на это число, отчего отношеніе не измѣнится (завис. 5); напр.:

отношеніе 42 : 12 равно отношенію 7 : 2.

216. Уничтоженіе дробныхъ членовъ. Если умножимъ оба члена отношенія на одно и то же число, то отношеніе не измѣнится (завис. 5). Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ всякое отношеніе, у котораго одинъ или оба члены дробные, замѣнить отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ. Пусть, напр., дано отношеніе $^7/_3 : 5$. Умножимъ оба члена этого отношенія на 3; тогда оно замѣнится отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ 7 : 15.

Если оба отношенія—дроби, то достаточно привести ихъ къ одному знаменателю и затѣмъ его отбросить; напр., отношеніе $^5/_{14} : ^{10}/_{21}$, послѣ приведенія дробей къ одному знаменателю, обратится въ такое: $^{15}/_{42} : ^{20}/_{42}$ Откинувъ знаменателя, мы увеличимъ оба члена въ 42 раза, отчего отношеніе не измѣнится; тогда получимъ отношеніе цѣлыхъ чиселъ 15 : 20 или 3 : 4.

217. Обратныя отношенія. Два отношенія называются обратными, если предыдущій членъ одного изъ нихъ служитъ послѣдующимъ членомъ другого и обратно. Таковы, напр., отношенія: 10 : 5 и 5 : 10.

II. Пропорція.

218. Опредѣленіе. Равенство, выражающее, что одно отношеніе равно другому отношенію, наз. пропорціей.

Замѣтивъ, напр., что каждое изъ двухъ отношеній 8 пуд. : 4 пуда и 20 арш. : 10 арш. равно одному и тому же числу 2, мы можемъ написать пропорцію:

$$8 \text{ пуд.} : 4 \text{ пуда} = 20 \text{ арш.} : 10 \text{ арш.};$$

$$\text{или } \frac{8 \text{ пуд.}}{4 \text{ пуд.}} = \frac{20 \text{ арш.}}{10 \text{ арш.}}$$

Пропорцію эту можно прочитать такъ:

отношеніе 8 пуд. къ 4 пуд. равно отношенію 20 арш. къ 10 арш.;

или 8 пуд. относятся къ 4 пуд. такъ, какъ 20 арш. относятся къ 10 арш.

Замѣнивъ въ написанной пропорціи оба отношенія именованныхъ чиселъ отношеніями отвлеченныхъ чиселъ, получимъ пропорцію отвлеченныхъ чиселъ:

$$8 : 4 = 20 : 10; \text{ или } \frac{8}{4} = \frac{20}{10}.$$

Изъ 4-хъ чиселъ, составляющихъ пропорцію, первое и послѣднее называются **крайними**, второе и третье — **средними членами** пропорціи.

Мы будемъ предполагать далѣе, что в с ѣ ч л е н ы п р о п о р ц і и — о т в л е ч е н н ы я ч и с л а.

219. Измѣненіе членовъ пропорціи безъ нарушенія ея. Если измѣнимъ члены пропорціи такъ, что первое отношеніе

останется равнымъ второму, то говорятъ, что пропорція не нарушена. Легко убѣдиться, что:

1) Если оба члена перваго или оба члена второго отношенія увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то пропорція не нарушится,

потому что отъ этого не измѣнится ни первое, ни второе отношенія; напр.:

12 : 6=48 : 24
36 : 18=48 : 24
12 : 6=16 : 8

2) Если оба предыдущіе или оба послѣдующіе члена увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то пропорція не нарушится,

потому что отъ этого каждое отношеніе измѣнится одинаково; напр.:

12 : 6= 48 : 24
36 : 6=144 : 24
12 : 2= 48 : 8

3) Если всѣ члены увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то пропорція не нарушится,

потому что отъ этого не измѣнится ни первое, ни второе отношенія; напр.:

12 : 6=48 : 24
6 : 3=24 : 12

Такимъ образомъ, не нарушая пропорціи, мы можемъ увеличивать или уменьшать въ одинаковое число разъ **каждый крайній съ каждымъ среднимъ.**

220*. Сокращеніе пропорціи. Если какой-нибудь изъ крайнихъ членовъ имѣетъ общаго дѣлителя съ какимъ-нибудь изъ среднихъ членовъ, то эти члены можно сократить на ихъ общаго дѣлителя (каждый крайній съ каждымъ среднимъ можно уменьшать въ одинаковое число разъ). Напр.:

$x : 20=35 : 25$
$x : 4=35 : 5$
$x : 4= 7 : 1$

221*. Уничтоженіе дробныхъ членовъ. Покажемъ на трехъ примѣрахъ, какъ можно это сдѣлать:

1) $10 : 3 = 2 : {}^{3}/_{5}$.

Откинемъ въ 4-мъ членѣ знаменателя; отъ этого мы увеличимъ его въ 5 разъ; чтобы пропорція не нарушилась, надо увеличить въ 5 разъ какой-нибудь изъ среднихъ членовъ (каждый крайній съ каждымъ среднимъ можно увеличивать въ одинаковое число разъ). Умножимъ на 5 второй или третій члены; тогда получимъ двѣ пропорціи съ цѣлыми членами: **10 : 15=2 : 3** и **10 : 3=10 : 3.**

2) $8 : {}^{7}/_{9} = 10 : {}^{35}/_{36}$.

Приведемъ обѣ дроби къ общему знаменателю и откинемъ его; этимъ мы увеличимъ въ одинаковое число разъ крайній и средній члены, отчего пропорція не нарушится: **8 : 28=10 : 35.**

3) $3 : {}^{7}/_{8} = {}^{17}/_{6} : {}^{119}/_{144}$.

Приведемъ всѣ члены къ общему знаменателю и отбросимъ его; этимъ мы увеличимъ всѣ члены въ одинаковое число разъ, отчего пропорція не нарушится:

432 : 126=408 : 119.

222. Важное свойство пропорціи. Во всякой пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.

Такъ, въ пропорціи 8 : 4=20 : 10 произведеніе крайнихъ равно 80 и произведеніе среднихъ также равно 80.

Чтобы доказать это свойство для всякой пропорціи, обозначимъ члены пропорціи такимъ образомъ:

1 чл. : 2 чл.=3 чл. : 4 чл.

По свойству отношенія мы можемъ написать:

1 членъ=2 чл.×отношеніе;
3 членъ=4 чл.×отношеніе;

при чемъ оба отношенія, входящія въ эти равенства, должны быть равны между собою (по опредѣленію пропорціи).

Умножимъ обѣ части перваго равенства на 4-й членъ, а обѣ части второго равенства—на 2-й членъ; отъ этого, очевидно, равенства не нарушатся, и мы получимъ:

1 чл.×4 чл.=2 чл.×отн.×4 чл.

3 чл.×2 чл.=4 чл.×отн.×2 чл.

Правыя части этихъ равенствъ состоятъ изъ одинаковыхъ множителей и потому равны другъ другу; значитъ, равны и лѣвыя части равенствъ, т.-е.:

1 чл.×4 чл.=3 чл.×2 чл.

Но 1-й и 4-й члены суть крайнiе, а 3-й и 2-й—среднiе; значитъ, произведенiе крайнихъ равно произведенiю среднихъ.

*Вообще, обозначивъ члены пропорцiи буквами a, b, c и d и каждое изъ равныхъ отношенiй, составляющихъ пропорцiю, буквою q, мы будемъ имѣть:

$a : b = c : d$, откуда: $a = bq$, $c = dq$.

Чтобы уравнять правыя части двухъ послѣднихъ равенствъ, умножимъ обѣ части перваго изъ нихъ на d и обѣ части второго на b:

$$ad = bqd, \quad cb = dqb$$

Правыя части этихъ равенствъ равны, слѣд., должны быть равны и лѣвыя части:

$ad = cb$, что и требов. доказать.

223. Обратное предложенiе. Мы доказали такимъ образомъ, что если 4 числа составляютъ пропорцiю, то произведенiе крайнихъ чиселъ равно произведенiю среднихъ; докажемъ теперь обратное предложенiе, а именно:

если произведенiе двухъ какихъ-нибудь чиселъ равно произведенiю двухъ другихъ чиселъ, то изъ этихъ 4-хъ чиселъ можно составить пропорцiю, беря сомножителей одного произведенiя за крайнiе, а сомножителей другого произведенiя—за среднiе члены пропорцiи.

Возьмемъ, напр., двѣ пары чиселъ: 4 и 21, 7 и 12, такихъ, что произведеніе первой пары равно произведенію второй пары:

$$4 \times 21 = 7 \times 12.$$

Раздѣлимъ оба эти равныя произведенія на каждое изъ слѣдующихъ 4-хъ произведеній: 4×7, 4×12, 21×7, 21×12, т.-е. на каждое изъ такихъ произведеній, въ которыхъ одинъ сомножитель взятъ изъ перваго произведенія (4×21), а другой—изъ второго произведенія (7×12). Очевидно, что если мы равныя числа раздѣлимъ на равныя числа, то получимъ равныя частныя; значитъ:

$$\frac{4 \times 21}{4 \times 7} = \frac{7 \times 12}{4 \times 7}; \quad \frac{4 \times 21}{4 \times 12} = \frac{7 \times 12}{4 \times 12}, \quad \frac{4 \times 21}{21 \times 7} = \frac{7 \times 12}{21 \times 7},$$

$$\frac{4 \times 21}{21 \times 12} = \frac{7 \times 12}{21 \times 12}.$$

Сокративъ эти равенства, получимъ:

$$\frac{21}{7} = \frac{12}{4}; \quad \frac{21}{12} = \frac{7}{4}; \quad \frac{4}{7} = \frac{12}{21}; \quad \frac{4}{12} = \frac{7}{21}.$$

Каждое изъ этихъ 4-хъ равенствъ есть пропорція, въ которой крайніе члены суть сомножители одного изъ данныхъ произведеній, а средніе члены—сомножители другого даннаго произведенія.

Вообще если 4 числа m, n, p и q таковы, что $mn = pq$, то, раздѣливъ обѣ части этого равенства на каждое изъ 4-хъ произведеній mp, mq, np и nq, получимъ:

$$\frac{mn}{mp} = \frac{pq}{mp}, \quad \frac{mn}{mq} = \frac{pq}{mq}, \quad \frac{mn}{np} = \frac{pq}{np}, \quad \frac{mn}{nq} = \frac{pq}{nq}.$$

Сокративъ эти равенства, найдемъ 4 пропорціи:

$$\frac{n}{p} = \frac{q}{m}, \quad \frac{n}{q} = \frac{p}{m}, \quad \frac{m}{p} = \frac{q}{n}, \quad \frac{m}{q} = \frac{p}{n},$$

въ которыхъ крайними членами служатъ сомножители одного изъ произведеній mn и pq, а средними — сомножители другого изъ этихъ произведеній

223,a. Провѣрка пропорціи. На основаніи доказаннаго обратнаго предложенія, чтобы повѣрить пропорцію, достаточно убѣдиться, что произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ членовъ ея; напр., пропорція 4 : 7=868 : 1519 вѣрна, потому что 1519 . 4=6076 и 868 . 7=6076

224. Нахожденіе неизвѣстнаго члена пропорціи. Возьмемъ пропорцію: 8 : 0,6=x : $^3/_4$, въ которой неизвѣстенъ одинъ изъ среднихъ членовъ, обозначенный буквою x. Въ ней произведеніе крайнихъ членовъ=8×$^3/_4$=6; значитъ, произведеніе ея среднихъ членовъ тоже должно быть 6; но одинъ изъ среднихъ членовъ есть 0,6; значитъ, другой средній получится, если 6 раздѣлимъ на 0,6:

$$x=6 : 0,6=60 : 6=10.$$

Такимъ образомъ, **средній членъ равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.**

Подобно этому, **крайній членъ равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній.**

225. Перестановки членовъ пропорціи безъ нарушенія ея. Въ каждой пропорціи можно переставить: 1) средніе члены, 2) крайніе члены и 3) крайніе на мѣсто среднихъ, а средніе на мѣсто крайнихъ. Отъ такихъ перестановокъ пропорція не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведеніемъ крайнихъ и произведеніемъ среднихъ членовъ. Пусть, напр., имѣемъ пропорцію:

1) 4 : 7 = 12 : 21.

Переставивъ въ ней средніе члены, получимъ:

2) 4 : 12 = 7 : 21.

Переставимъ въ каждой изъ этихъ пропорцій крайніе члены, тогда получимъ еще двѣ пропорціи:

3) 21 : 7 = 12 : 4; 4) 21 : 12 = 7 : 4.

Наконецъ, переставимъ въ каждой изъ полученныхъ 4-хъ пропорцій средніе на мѣсто крайнихъ и наоборотъ; тогда получимъ еще 4 пропорціи:

5) $7:4=21:12$; 7) $7:21=4:12$;
6) $12:4=21:7$; 8) $12:21=4:7$.

Замѣчаніе. Въ каждой изъ этихъ 8-ми пропорцій можно было бы переставить отношенія, т.-е. поставить второе отношеніе первымъ, а первое — вторымъ; но отъ такой перестановки не получится новой пропорціи. Если, напр., въ пропорціи 5-й переставимъ отношенія, то получимъ не новую пропорцію, а ту, которая была получена ранѣе, именно подъ № 4. Слѣд., путемъ всевозможныхъ перестановокъ можно получить вмѣсто одной пропорціи 8 пропорцій.

226. Непрерывная пропорція. Пропорція называется **непрерывной**, если оба средніе или оба крайніе ея члена равны другъ другу. Таковы, напр., пропорціи:

$$32:\mathbf{16}=\mathbf{16}:8; \qquad \mathbf{20}:5=80:\mathbf{20}.$$

Если въ послѣдней пропорціи переставимъ второе отношеніе съ первымъ, то получимъ: $80:\mathbf{20}=\mathbf{20}:5$; отсюда видно, что непрерывную пропорцію всегда можно представить такъ, что одинаковы будутъ оба средніе ея члена.

227. Среднее геометрическое. Повторяющійся членъ непрерывной пропорціи называется **среднимъ геометрическимъ числомъ** двухъ другихъ членовъ пропорціи. Такъ, 16 есть среднее геометрическое 32 и 8.

*Пусть требуется найти среднее геометрическое двухъ чиселъ 20 и 5. Назвавъ его x, получимъ, по опредѣленію, такую пропорцію: $20:x=x:5$; откуда находимъ: $x^2=20.5=100$, $x=\sqrt{100}=10$. Исходя изъ этой формулы, можемъ опредѣлить среднее геометрическое двухъ чиселъ, какъ корень квадратный изъ произведенія ихъ.

Это опредѣленіе распространяютъ и на тотъ случай, когда данныхъ чиселъ болѣе двухъ. **Среднимъ геометрическимъ** n **данныхъ чиселъ называется корень** n**-овой степени изъ произведенія этихъ чиселъ.**

228. Среднее ариѳметическое. Среднимъ ариѳметическимъ нѣсколькихъ чиселъ называется частное отъ дѣленія суммы этихъ чиселъ на число ихъ.

Такъ среднее ариѳметическое 5-и чиселъ: 10, 2, 18, 4 и 6 равно:

$$\frac{10+2+18+4+6}{5}=8.$$

229. Сложныя пропорціи. Изъ двухъ или болѣе пропорцій можно составить новыя пропорціи, называемыя **с л о ж н ы м и**, основываясь на слѣдующихъ истинахъ:

1) **Если соотвѣтственные члены нѣсколькихъ пропорцій перемножимъ, то получимъ новую пропорцію.**

Пусть, напр., имѣемъ двѣ пропорціи:

$$40 : 10 = 100 : 25 \qquad \text{(отношеніе}=4),$$
$$4 : 2 = 10 : 5 \qquad \text{(отношеніе}=2).$$

Перемножимъ соотвѣтственные члены этихъ пропорцій; тогда получимъ такую сложную пропорцію:

$$(40\ .\ 4) : (10\ .\ 2) = (100\ .\ 10) : (25\ .\ 5),$$

т.-е. $$160 : 20 = 1000 : 125 \qquad \text{(отношеніе}=8).$$

У такой пропорціи каждое отношеніе равно **п р о и з в е д е н і ю о т н о ш е н і й** данныхъ пропорцій.

2) **Если члены одной пропорціи раздѣлимъ на соотвѣтственные члены другой пропорціи, то получимъ новую пропорцію.**

Напр., если раздѣлимъ соотвѣтственные члены данныхъ выше пропорцій, то получимъ такую сложную пропорцію:

$$\frac{40}{8} : \frac{10}{4} = \frac{100}{10} : \frac{25}{5},\ \text{ т.-е. }\ 5 : 2^1/_2 = 10 : 5 \quad \text{(отношеніе}=2).$$

У такой пропорціи каждое отношеніе равно частному отъ дѣленія отношеній данныхъ пропорцій.

230. Производныя пропорціи. Изъ одной пропорціи можно получить нѣсколько другихъ пропорцій, называемыхъ производными, основываясь на слѣдующихъ соображеніяхъ.

Возьмемъ какое-нибудь отношеніе, напр., 21 : 7. Если къ предыдущему его члену приложимъ послѣдующій, то получимъ новое отношеніе: (21+7) : 7, которое, очевидно, больше прежняго на одну единицу. Если же изъ предыдущаго члена вычтемъ послѣдующій (если это возможно, какъ въ нашемъ примѣрѣ), то получимъ новое отношеніе: (21—7) : 7, которое меньше прежняго на одну единицу.

Замѣтивъ это, возьмемъ какую-нибудь пропорцію:

$$21 : 7 = 30 : 10$$

и составимъ изъ нея новую пропорцію такимъ образомъ:

$$(21+7) : 7 = (30+10) : 10 \qquad (1).$$

Эта пропорція вѣрна, потому что каждое отношеніе въ ней больше отношеній данной пропорціи на одно и то же число, именно на 1. Составленную нами производную пропорцію можно высказать такъ:

сумма членовъ перваго отношенія относится къ его послѣдующему члену, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ его послѣдующему члену.

Составимъ теперь изъ данной пропорціи такую:

$$(21-7) : 7 = (30-10) : 10 \qquad (2).$$

Эта пропорція вѣрна, потому что каждое отношеніе въ ней меньше отношеній данной пропорціи на одно и то же число, именно на 1. Составленную нами вторую производную пропорцію можно высказать такъ:

разность членовъ перваго отношенія относится къ его послѣдующему члену, какъ разность членовъ второго отношенія относится къ его послѣдующему члену.

Переставимъ средніе члены въ первой производной пропорціи и въ данной:

$$(21+7):(30+10)=7:10;$$
$$21:30=7:10.$$

Въ этихъ двухъ пропорціяхъ вторыя отношенія одинаковы; значитъ, первыя отношенія должны быть равны:

$$(21+7):(30+10)=21:30.$$

Переставивъ средніе члены, получимъ:

$$(21+7):21=(30+10):30 \qquad (3).$$

Эту третью производную пропорцію можно высказать такъ:

сумма членовъ перваго отношенія относится къ его предыдущему члену, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ его предыдущему члену.

Переставимъ средніе члены во второй производной пропорціи и въ данной:

$$(21-7):(30-10)=7:10$$
$$21:30=7:10.$$

Откуда: $(21-7):(30-10)=21:30$

или $(21-7):21=(30-10):30 \qquad (4).$

Эту 4-ю производную пропорцію можно высказать такъ:

разность членовъ перваго отношенія относится къ его предыдущему члену, какъ разность членовъ второго отношенія относится къ его предыдущему члену.

Переставимъ средніе члены въ первой и второй производныхъ пропорціяхъ:

$$(21+7):(30+10)=7:10,$$
$$(21-7):(30-10)=7:10.$$

Откуда: $(21+7):(30+10)=(21-7):(30-10)$

или $(21+7):(21-7)=(30+10):(30-10) \qquad (5)$

Эту 5-ю производную пропорцію можно высказать такъ:

сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.

230,а. Свойство равныхъ отношеній. Возьмемъ нѣсколько равныхъ отношеній, напр., такія три отношенія:

$$40 : 10 = 20 : 5 = 8 : 2.$$

Такъ какъ во всякомъ отношеніи предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе, то можемъ написать (принимая во вниманіе, что каждое данное отношеніе есть число 4):

$$40 = 10 \,.\, 4; \quad 20 = 5 \,.\, 4; \quad 8 = 2 \,.\, 4.$$

Сложимъ лѣвыя части этихъ равенствъ между собою и правыя части между собою. Очевидно, что отъ сложенія равныхъ чиселъ мы должны получить и равныя суммы; поэтому:

$$40 + 20 + 8 = 10 \,.\, 4 + 5 \,.\, 4 + 2 \,.\, 4.$$

Въ правой части этого равенства отдѣльно умножаются на 4 числа 10, 5 и 2 и полученныя произведенія складываются. Вмѣсто этого можно предварительно числа 10, 5 и 2 сложить и затѣмъ сумму умножить сразу на 4. Поэтому послѣднее выведенное нами равенство мы можемъ переписать такъ:

$$40 + 20 + 8 = (10 + 5 + 2) \,.\, 4.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на сумму $10+5+2$; отъ этого равенство не нарушится и мы получимъ:

$$(40 + 20 + 8) : (10 + 5 + 2) = 4.$$

Но каждое изъ взятыхъ нами равныхъ отношеній также равно числу 4; значитъ:

$$(40 + 20 + 8) : (10 + 5 + 2) = 40 : 10 = 20 : 5 = 8 : 2.$$

Такимъ образомъ: **если нѣсколько отношеній равны другъ другу, то сумма всѣхъ предыдущихъ ихъ членовъ такъ относится къ суммѣ всѣхъ послѣдующихъ, какъ какой-нибудь предыдущій относится къ своему послѣдующему.**

Всякая пропорція представляетъ собою два равныя отношенія; значитъ, указанное нами свойство принадлежитъ также и пропорціи.

ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ.

Задачи на пропорціональныя величины.

I. Простое тройное правило.

231. Величины, прямо пропорціональныя. Возьмемъ такую задачу: аршинъ сукна стоятъ 30 руб. Сколько стоятъ 15 арш. этого сукна?

Числа: 8 арш. и 15 арш. представляютъ собою два значенія одной и той же величины, именно количества аршинъ сукна; числа: 30 руб. и искомое число руб. составляютъ также два значенія одной и той же величины, именно стоимости сукна. Значитъ, въ предложенной задачѣ говорится о двухъ величинахъ: о количествѣ аршинъ сукна и о стоимости ихъ. Эти величины зависятъ одна отъ другой, потому что съ измѣненіемъ одной изъ нихъ измѣняется и другая. Разсмотримъ эту зависимость подробнѣе.

Пусть количеству аршинъ сукна мы дали два какихъ-нибудь произвольныхъ значенія, напр.: 10 арш. и 25 арш. Тогда стоимость ихъ получитъ тоже два значенія, но не произвольныя, а вполнѣ опредѣленныя, находящіяся въ соотвѣтствіи со взятыми значеніями количества аршинъ. Положимъ, мы не знаемъ, сколько стоятъ 10 аршинъ и сколько стоятъ 25 аршинъ сукна. Но, и не зная этого, мы можемъ все-таки утверждать, что 25 арш. сукна стоятъ болѣе, чѣмъ 10 арш. этого сукна, и притомъ во столько разъ болѣе, во сколько разъ 25 арш. болѣе 10 арш.; другими

словами, мы можемъ утверждать, что отношеніе стоимости 25-ти арш. сукна къ стоимости 10-ти арш. этого сукна должно быть такое же, какъ и отношеніе 25-ти арш. къ 10-ти арш., что можно выразить такъ:

$$\frac{\text{стоимость 25-ти арш.}}{\text{стоимость 10-ти арш.}}=\frac{\text{25 арш.}}{\text{10 арш.}}$$

Дѣйствительно, отношеніе 25-ти арш. къ 10 арш. есть число $2^1/_2$, и отношеніе стоимости 25-ти арш. къ стоимости 10-ти арш. тоже равно числу $2^1/_2$.

Какія бы два значенія количества аршинъ мы ни взяли, всегда найдемъ, что имъ соотвѣтствуютъ два опредѣленныя значенія стоимости, и что отношеніе этихъ значеній количества аршинъ равно отношенію соотвѣтствующихъ значеній стоимости.

Если двѣ какія-нибудь величины зависятъ одна отъ другой такъ, что каждому значенію одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ одно опредѣленное значеніе другой, при чемъ отношеніе каждыхъ двухъ значеній одной изъ нихъ равно отношенію двухъ соотвѣтствующихъ значеній другой, то такія величины называются **прямо пропорціональными** (или просто пропорціональными).

Такъ, количество аршинъ сукна пропорціонально стоимости ихъ (или стоимость сукна пропорціональна количеству аршинъ сукна).

Весьма простой **признакъ пропорціональности** двухъ величинъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Если съ увеличеніемъ произвольнаго значенія одной величины въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д. соотвѣтствующее значеніе другой величины увеличивается тоже въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д., то такія величины пропорціональны.

Такъ, если произвольное число аршинъ сукна увеличимъ въ 2, 3, 4 и т. д. раза, то стоимость ихъ увеличится тоже въ 2, 3, 4 и т. д. раза; это—величины пропорціональныя.

Подобно этому можно сказать также, что:

стоимость товара пропорціональна его вѣсу (если товаръ продается на вѣсъ, напр., чай);

вѣсъ однороднаго тѣла пропорціоналенъ его объему (напр., вѣсъ желѣза);

длина пути, проходимаго движущимся равномѣрно тѣломъ (напр., поѣздомъ желѣзной дороги) пропорціональна продолжительности движенія;

плата рабочимъ пропорціональна числу ихъ (если каждый рабочій получаетъ одинаково);

величина дроби пропорціональна ея числителю; и т. п.

232. Рѣшеніе способомъ приведенія къ единицѣ. Уяснивъ зависимость двухъ величинъ нашей задачи, выразимъ ходъ рѣшенія ея слѣдующими строчками.

Стоимость сукна пропорціональна числу аршинъ его; поэтому 1 арш. стоитъ въ 8 разъ менѣе, чѣмъ 8 арш.,

а 15 арш. стоятъ въ 15 разъ болѣе, чѣмъ 1 арш.;

но 8 арш. стоятъ 30 рублей;

значитъ, 1 аршинъ стоитъ $\frac{30}{8}$ руб.,

а 15 аршинъ стоятъ $\frac{30}{8} \cdot 15 = 56\frac{1}{4}$ руб.

Способъ, которымъ мы рѣшили эту задачу, наз. **приведеніемъ къ единицѣ**, такъ какъ по этому способу одно изъ условій задачи приводится къ 1 (такъ, въ приведенной задачѣ мы узнали стоимость 1 аршина).

232,а. Рѣшеніе посредствомъ пропорціи. Стоимость сукна пропорціональна числу аршинъ его; поэтому 15 аршинъ стоятъ болѣе 8-ми аршинъ во столько разъ, во сколько 15 болѣе 8; значитъ, обозначивъ искомую стоимость черезъ x, получимъ пропорцію: $x : 30 = 15 : 8$; откуда: $x = (30 \times 15) : 8 = 56^1/_4$ руб.

233. Величины, обратно пропорціональныя. Возьмемъ такую задачу: 6 человѣкъ рабочихъ окан-

чиваютъ нѣкоторую работу въ 18 дней; во сколько дней окончатъ ту же работу 9 человѣкъ, работая такъ же успѣшно, какъ и первые?

Въ этой задачѣ тоже говорится о двухъ величинахъ: о количествѣ рабочихъ и о продолжительности работы ихъ. Эти величины зависятъ одна отъ другой, потому что съ измѣненіемъ одной измѣняется и другая. Но эта зависимость иная, чѣмъ въ задачѣ 1-й. Тамъ отношеніе двухъ произвольныхъ значеній одной величины было равно отношенію двухъ соотвѣтствующихъ значеній другой величины; здѣсь же отношеніе двухъ произвольныхъ значеній одной величины равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ значеній другой величины. Возьмемъ, напр., два такихъ произвольныхъ значенія количества рабочихъ: 6 чел. и 12 чел. Имъ соотвѣтствуютъ два значенія продолжительности работы, но не произвольныя, а находящіяся въ соотвѣтствіи со взятыми значеніями количества рабочихъ; при чемъ, очевидно, бо́льшему количеству рабочихъ соотвѣтствуетъ меньшее число дней работы, а именно: число дней во столько разъ должно быть меньше, во сколько разъ число рабочихъ больше; такъ, если 6 чел. оканчиваютъ работу въ 18 дней, то 12 чел. окончатъ работу въ 9 дней.

Значитъ, отношеніе 6 чел. къ 12 чел. равно обратному отношенію 18 дней къ 9 днямъ, т.-е.

$$\frac{6 \text{ чел.}}{12 \text{ чел.}} = \frac{9 \text{ дней}}{18 \text{ дней}}.$$

Если двѣ величины зависятъ одна отъ другой такъ, что каждому значенію одной изъ нихъ соотвѣтствуетъ одно опредѣленное значеніе другой, при чемъ отношеніе каждыхъ двухъ значеній одной изъ нихъ равно обратному отношенію соотвѣтствующихъ значеній другой, то такія величины называются **обратно пропорціональными.**

Такъ, продолжительность работы обратно пропорціональна количеству рабочихъ (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, т.-е. при одинаковомъ размѣрѣ работы и одинаковой степени успѣшности работы каждаго рабочаго).

Весьма простой признакъ обратной пропорціональности двухъ величинъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Если съ увеличеніемъ произвольнаго значенія одной величины въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д. соотвѣтствующее значеніе другой величины уменьшается тоже въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д., то такія величины обратно пропорціональны.

Такъ, съ увеличеніемъ количества рабочихъ въ 2, въ 3, въ 4 и т. д. разъ, продолжительность работы уменьшается въ 2, въ 3, въ 4 и т. д. разъ; это—величины обратно пропорціональныя.

Подобно этому можно сказать также, что:

вѣсъ товара, который можно купить на данную сумму денегъ, обратно пропорціоналенъ цѣнѣ единицы вѣса этого товара;

время, въ теченіе котораго проходится данный путь движущимся равномѣрно тѣломъ, обратно пропорціонально скорости движенія;

величина дроби обратно пропорціональна ея знаменателю; и т. п.

Замѣчаніе. Для того, чтобы двѣ зависящія другъ отъ друга величины были пропорціональны (прямо или обратно), недостаточно только того обстоятельства, что одна изъ этихъ величинъ увеличивается, когда и другая увеличивается (для прямой пропорціональности), или что одна величина увеличивается, когда другая уменьшается (для обратной пропорціональности). Напр., если какое-нибудь слагаемое увеличится, то и сумма увеличится; но было бы ошибочно сказать, что сумма прямо пропорціональна слагаемому, такъ какъ если увеличимъ

слагаемое, положимъ, въ 3 раза, то сумма хотя и увеличится, но не въ 3 раза. Подобно этому нельзя, напр., сказать, что разность двухъ чиселъ обратно пропорціональна вычитаемому, такъ какъ если увеличится вычитаемое, положимъ, въ 2 раза, то разность хотя и уменьшится, но не въ 2 раза. Нужно, чтобы увеличеніе и уменьшеніе обѣихъ величинъ происходило **въ одинаковое число разъ.**

234. Рѣшеніе способомъ приведенія къ единицѣ. Уяснивъ зависимость между двумя величинами нашей задачи, рѣшимъ ее приведеніемъ къ единицѣ, разсуждая слѣдующимъ образомъ:

число дней обратно пропорціонально числу рабочихъ;

поэтому 1 чел. окончитъ работу въ число дней, бо́льшее въ 6 разъ, чѣмъ число дней, въ которое оканчиваютъ работу 6 чел.,

а 9 чел. окончатъ работу въ число дней, меньшее въ 9 разъ, чѣмъ число дней, въ которое оканчиваетъ работу 1 чел.

Но 6 чел. оканчиваютъ работу въ 18 дней;

значитъ, 1 чел. окончитъ работу въ 18 . 6 дней,

а 9 чел. окончатъ работу въ $\frac{18 \cdot 6}{9} = 12$ дней.

234,а. Рѣшеніе посредствомъ пропорціи. Число дней работы обратно пропорціонально числу рабочихъ; поэтому 9 чел. окончатъ работу въ меньшее число дней, чѣмъ 6 чел., и во столько разъ меньшее, во сколько 6 меньше 9; значитъ, искомое число x дней должно удовлетворять пропорціи $x : 18 = 6 : 9$; откуда:

$$x = (18 \times 6) : 9 = 12 \text{ дней.}$$

235. Простое тройное правило. Въ каждой изъ приведенныхъ задачъ рѣчь шла только о двухъ величинахъ, прямо пропорціональныхъ (какъ въ первой задачѣ), или обратно пропорціональныхъ (какъ во второй

задачѣ); при этомъ въ каждой задачѣ дано было по одному соотвѣтствующему значенію обѣихъ величинъ:

1-я задача.		2-я задача.	
Колич. сукна. . .	8 арш.	Колич. рабочихъ.	6 чел.
Стоимость ихъ . .	30 руб.	Продолж. работы.	18 дней,

а требовалось узнать, какое значеніе приметъ одна изъ величинъ, если другая получитъ новое данное значеніе:

1-я задача.	2-я задача.
Колич. сукна . . . 15 арш.	Колич. рабочихъ 8 чел.
Какова ихъ стоимость?	Какова продолж. работы?

Въ такихъ задачахъ, слѣд., даны 3 числа, а требуется отыскать 4-е число, которое вмѣстѣ съ 3 данными числами составляло бы пропорцію.

Способъ рѣшать такія задачи наз. **простымъ тройнымъ правиломъ.**

II. Сложное тройное правило.

236. Задача. Для освѣщенія 18 комнатъ въ 48 дней издержано 120 фунт. керосину, при чемъ въ каждой комнатѣ горѣло по 4 лампы. На сколько дней достанетъ 125 фунт. керосину, если освѣщать 20 комнатъ и въ каждой комнатѣ будетъ горѣть по 3 лампы?

Расположимъ данныя этой задачи въ двѣ такія строчки (неизвѣстное число поставимъ въ послѣднемъ столбцѣ):

18 ком.—120 фун.—4 лам.—48 дней.
20 » —125 » —3 » — x »

Искомое число дней было бы 48, если бы число комнатъ было 18, число фунтовъ керосину было 120 и число лампъ въ каждой комнатѣ было 4. Но всѣ эти числа замѣнены въ вопросѣ задачи новыми, отчего, вѣроятно, измѣнится и число дней изъ 48 въ какое-нибудь иное. Чтобы удобнѣе

узнать, какъ именно измѣнится число дней, предположимъ что сначала только одно число верхней строчки замѣнено новымъ числомъ, а потомъ и другое, и третье. Такъ, допустимъ, что сначала число комнатъ измѣнено изъ 18 въ 20, потомъ число фунтовъ измѣнено изъ 120 въ 125 и, наконецъ, число ламп измѣнено изъ 4 въ 3.

Когда измѣнимъ число комнатъ изъ 18 въ 20, а прочія числа оставимъ тѣ же самыя, то мы получимъ упрощенную задачу, которую можно высказать такъ:

для освѣщенія 18 комнатъ керосину достаетъ на 48 дней; на сколько дней достанетъ керосину для освѣщенія 20 комн. (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, т.-е. если керосину идетъ 120 фунт. и въ каждой комнатѣ будетъ горѣть по 4 лампы)?

Эта задача на простое тройное правило. Рѣшимъ ее приведеніемъ къ 1.

Число дней обратно пропорціонально числу комнатъ; поэтому если при освѣщенія 18 комнатъ керосину достаетъ на 48 дней, то при освѣщеніи только одной комнаты его достанетъ на 48 . 18 дней, а при освѣщеніи 20 комнатъ число дней окажется $\frac{48 \,.\, 18}{20}$ (что равно $43^1/_5$ дня, но вычислять эту формулу теперь безполезно).

Замѣнимъ теперь 120 фунт. керосину 125-ю фунт. Тогда получится такая задача на простое тройное правило:

120 фунт. керосину сгораютъ въ $\frac{48 \,.\, 18}{20}$ дней; во сколько дней сгорятъ 125 фунт. керосину (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ)?

Число дней прямо пропорціонально числу фунтовъ: поэтому 1 фунтъ керосину сгоритъ въ $\frac{48 \,.\, 18}{20 \,.\, 120}$ дней, а 125 ф. сгорятъ въ $\frac{48 \,.\, 18 \,.\, 125}{20 \,.\, 120}$ дней.

Наконецъ, замѣнимъ 4 лампы 3-мя лампами. Тогда получится такая задача на простое тройное правило:

если въ каждой комнатѣ горятъ 4 лампы, то керосину достанетъ на $\frac{48.18.125}{20.120}$ дней; на сколько дней достанетъ керосину, если въ комнатѣ будутъ горѣть по 3 лампы (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ)?

Число дней обратно пропорціонально числу лампъ; поэтому если будетъ горѣть одна лампа, то дней окажется $\frac{48.18.125.4}{20.120}$, а при горѣніи 3-хъ лампъ ихъ должно быть: $x=\frac{48.18.125.4}{20.120.3}$.

Теперь приняты во вниманіе всѣ условія вопроса; остается вычислить полученную формулу: $x=60$ дней.

237. Сложное тройное правило. Въ задачѣ, рѣшенной въ предыдущемъ параграфѣ, говорилось о 4-хъ величинахъ: о количествѣ комнатъ, о продолжительности освѣщенія, о количествѣ керосину и о количествѣ лампъ, при чемъ каждая пара этихъ величинъ находится между собою въ пропорціональной зависимости, прямой или обратной (если всѣ прочія величины не измѣняются); при этомъ дано было по одному соотвѣтствующему значенію всѣхъ величинъ:

18 комн.—120 фунт.—4 лампы—48 дней,

а требовалось найти, какое значеніе приметъ одна изъ величинъ, если всѣ прочія получатъ нѣкоторыя новыя данныя значенія:

20 ком.—125 фунт.—3 лампы—x дней.

Способъ рѣшать такія задачи, когда данныхъ величинъ болѣе двухъ, наз. **сложнымъ тройнымъ правиломъ.** Рѣшеніе ихъ, какъ мы видѣли, сводится къ рѣшенію нѣсколькихъ задачъ на простое тройное правило.

III. Задачи на проценты.

238. Опредѣленіе. «Процентомъ» какого-либо числа называется сотая часть этого числа; слѣд., два, три... процента какого-нибудь числа означаютъ двѣ, три... сотыхъ этого числа *).

Такъ, если говорятъ, что въ такомъ-то учебномъ заведеніи число успѣвающихъ учениковъ составляетъ 75 процентовъ всего числа учащихся, то это значитъ, что первое число составляетъ 75 сотыхъ второго числа (или, что все равно, на каждыхъ сто учениковъ приходится 75 успѣвающихъ и 25 не успѣвающихъ).

Процентъ обозначается знакомъ %; напр., 5% означаетъ 5 процентовъ. Такимъ образомъ:

$$50\% \text{ означаютъ } \frac{50}{100}, \text{ т.-е. } \frac{1}{2};$$

$$25\% \quad » \quad \frac{25}{100}, \text{ т.-е. } \frac{1}{4};$$

$$75\% \quad » \quad \frac{75}{100}, \text{ т.-е. } \frac{3}{4};$$

$$10\% \quad » \quad \frac{10}{100}, \text{ т.-е. } \frac{1}{10};$$

$$5\% \quad » \quad \frac{5}{100}, \text{ т.-е. } \frac{1}{20};$$

$$4\% \quad » \quad \frac{4}{100}, \text{ т.-е. } \frac{1}{25}; \text{ и т. п.}$$

Чаще всего слово «процентъ» употребляется въ коммерческихъ вопросахъ, когда рѣчь идетъ о прибыли или убыткѣ. Напр., говорятъ, что торговецъ получилъ 20 процентовъ прибыли на затраченный имъ капиталъ. Это надо понимать такъ, что онъ получилъ прибыли 20 сотыхъ затраченнаго капитала (иначе сказать, 20 рублей на ка-

*) Слово «процентъ» происходитъ отъ латинскаго выраженія «pro-centum», что означаетъ «со ста», или «на сто».

ждые затраченные 100 рублей, или 20 коп. на каждыя затраченныя 100 коп.).

238,а. Нѣкоторыя названія, встрѣчающіяся въ задачахъ на проценты. Когда одно лицо занимаетъ у другого деньги, то при этомъ часто ставится условіемъ, чтобы **должникъ** уплачивалъ **заимодавцу** опредѣленные ежегодные проценты. Если, напр., говорятъ, что нѣкто занялъ 500 руб. по 7% (или изъ 7%) годовыхъ, то это значитъ, что должникъ обязался, во-1-хъ, уплатить по истеченіи условленнаго срока эти 500 руб., а, во-2-хъ, сверхъ этой суммы уплачивать заимодавцу ежегодно до конца срока по 7 сотыхъ этого капитала, т.-е. по 35 руб. Замѣтимъ, что заимодавецъ называется иначе **кредиторомъ.**

Случается, что лица, имѣющія свободныя деньги, отдаютъ ихъ въ **банкъ.** Въ такомъ случаѣ банкъ уплачиваетъ этимъ лицамъ за пользованіе ихъ деньгами опредѣленные ежегодные проценты. Въ свою очередь, банкъ выдаетъ **ссуды** за извѣстные ежегодные проценты.

Капиталъ, отданный на проценты, называется **начальнымъ капиталомъ;** число процентовъ (иначе—прибыль, получаемая въ теченіе одного года на 100 рублей, выраженная въ рубляхъ) называется **процентною таксою;** прибыль на весь капиталъ—**процентными деньгами** (или просто **процентами**); начальный капиталъ, сложенный съ процентными деньгами, называется **наращеннымъ** капиталомъ. Если, напр., 200 рублей отданы въ **ростъ** *) на 1 годъ по 5%, то начальный капиталъ—это 200 руб., процентная такса—5, процентныя деньги за годъ—10 руб., наращенный капиталъ—210 руб.

239. Простые и сложные проценты. Проценты бываютъ простые и сложные. Чтобы понять разницу между тѣми и другими, возьмемъ примѣръ. Положимъ,

*) Т.-е. отданы въ банкъ или частному лицу на проценты.

что кто-нибудь отдалъ въ банкъ 100 руб. по 5%. Если это лицо по прошествіи года не возьметъ своихъ 5 руб. процентныхъ денегъ, то его капиталъ обратится въ 105 руб. Можетъ быть поставлено условіе, чтобы въ теченіе второго года проценты нарастали не только на начальный капиталъ, т.-е. на 100 руб., но еще и на тѣ 5 руб., которые наросли въ теченіе перваго года; также и въ слѣдующіе года. Или же можетъ быть условлено, чтобы въ теченіе второго и слѣдующихъ годовъ проценты считались только на начальный капиталъ, т.-е. на 100 руб., хотя бы лицо, положившее капиталъ, и не брало ежегодно процентныхъ денегъ.

Когда проценты считаются не только на начальный капиталъ, но и на проценты съ него, образовавшіеся отъ прошлыхъ лѣтъ и присоединяемые къ капиталу, то они называются **сложными**; если же проценты считаются только на начальный капиталъ, то они называются **простыми**.

Во всѣхъ задачахъ, которыя будутъ приведены ниже, предполагаются простые проценты; это всего чаще бываетъ въ дѣйствительности.

240. Замѣчаніе. При рѣшеніи задачъ на простые проценты надо имѣть въ виду, что:

1. Процентныя деньги пропорціональны времени и капиталу, при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ.

Если, напр., капиталъ 100 руб. и процентная такса 5%, то процентныя деньги за 1 годъ будутъ 5 р., за 2 года—10 р., за 3 года—15 р. и т. д., т.-е. онѣ возрастаютъ пропорціонально времени; а если время 1 годъ и такса 5%, то процентныя деньги со 100 руб. будутъ 5 руб., съ 200 р.—10 руб., съ 300 руб.—15 руб. и т. д., т.-е. онѣ возрастаютъ пропорціонально капиталу.

2. Наращенный капиталъ хотя и возрастаетъ съ теченіемъ времени, но не пропорціоналенъ времени.

Если, напр., капиталъ 100 руб. и процентная такса 5%,

то черезъ 1 годъ наращенный капиталъ будетъ 105 руб., а черезъ 2 года 110 руб. (а не 210 руб.), черезъ 3 года 115 руб. (а не 315 руб.), и т. д.

241. Различныя группы задачъ на проценты. Задачи на проценты можно разбить на 4 группы соотвѣтственно тому, что неизвѣстно изъ слѣдующихъ 4-хъ величинъ: a) процентныя деньги (или наращенный капиталъ), b) начальный капиталъ, c) процентная такса и d) время, въ теченіе котораго капиталъ находится въ ростѣ; при этомъ задачи второй группы бываютъ двоякаго рода: въ однѣхъ даются процентныя деньги, въ другихъ— наращенный капиталъ. Какъ рѣшаются задачи во всѣхъ этихъ случаяхъ, будетъ видно изъ слѣдующихъ 5 примѣровъ.

242. Задача 1. Найти процентныя деньги съ капитала 7285 р., отданнаго въ ростъ по 8% на $3^1/_2$ года.

Такъ какъ 8% какого-нибудь числа означаютъ 8 сотыхъ этого числа, то:

7285 руб. въ годъ приносятъ: $7285 \cdot \frac{8}{100} = \frac{7285.8}{100}$ руб.,

и такъ какъ процентныя деньги пропорціональны времени, то 7285 руб. въ $\frac{7}{2}$ года приносятъ:

$$\frac{7285.8.7}{100.2} = 2039 \text{ р. } 80 \text{ к.}$$

Замѣчаніе. Если время содержитъ мѣсяцы или дни, то надо найти процентныя деньги за 1 мѣсяцъ или за 1 день, а потомъ и за данное число мѣсяцевъ или дней. При этомъ надо имѣть въ виду, что **въ коммерческихъ вопросахъ, для удобства вычисленій, принято считать годъ въ 360 дней, а мѣсяцъ—въ 30 дней.**

243. Задача 2. Какой капиталъ, отданный въ ростъ по $6^3/_4\%$, принесетъ въ 6 лѣтъ 8 мѣсяцевъ 3330 руб. процентныхъ денегъ?

Процентныя деньги за 1 годъ составляютъ $6^3/_4$ (т.-е. $^{27}/_4$) сотыхъ капитала, а за 6 л. 8 мѣс. (=80 мѣс.) онѣ составятъ $\frac{27.80}{4.12}$ сотыхъ капитала, что, по сокращеніи, равно 45 сотымъ капитала. Эти $^{45}/_{100}$ капитала, согласно условію задачи, должны равняться 3330 руб.; значитъ, здѣсь дана дробь неизвѣстнаго числа (капитала), а требуется найти цѣлое неизвѣстное число; это находится дѣленіемъ (§ 172,1). Начал. капиталъ — $3330 : \frac{45}{100} = 7400$ р.

244. Задача 3. Какой капиталъ, отданный по 5%, обратится черезъ 6 лѣтъ въ 455 руб. (если процентныя деньги не берутся въ теченіе этихъ 6 лѣтъ)?

Въ 455 руб. заключаются начальный капиталъ и процентныя деньги съ него за 6 лѣтъ. За 1 годъ процентныя деньги составляютъ $^5/_{100}$ капитала, слѣд., за 6 лѣтъ онѣ составятъ $^5/_{100} \cdot 6 = ^{30}/_{100} = ^3/_{10}$ капитала. Такимъ образомъ, въ 455 руб. заключаются начальный капиталъ и еще $^3/_{10}$ его, т.-е. $^{13}/_{10}$ начальнаго капитала; значитъ:

$$\text{нач. капиталъ} = 455 : \frac{13}{10} = \frac{4550}{13} = 350 \text{ (руб.)}.$$

245. Задача 4. Поскольку процентовъ (по какой таксѣ) надо отдать капиталъ 15108 руб., чтобы въ 2 года 8 мѣсяцевъ получить 2417 руб. 28 коп. процентныхъ денегъ?

Чтобы узнать таксу процентовъ, достаточно опредѣлить. сколько копеекъ въ теченіе года получается со 100 коп. или съ 1 рубля?

Такъ какъ 15108 руб. въ 32 мѣс. приносятъ 241728 коп., то 1 руб. въ 12 мѣс. приноситъ $\frac{241728.12}{15108.32} = 6$ коп.

Если 1 рубль приноситъ въ годъ 6 коп., то, значитъ, капиталъ отданъ по 6%.

Замѣчаніе. Если въ задачахъ подобнаго рода вмѣсто процентныхъ денегъ данъ наращенный капиталъ, то слѣ-

дуетъ изъ него вычесть начальный капиталъ; тогда получимъ процентныя деньги.

246. Задача 5. На сколько времени надо отдать 2485 р. по 7%, чтобы получить 139 руб. 16 коп. процентныхъ денегъ?

Такъ какъ въ 1 годъ 2485 руб. приносятъ (2485 . $^7/_{100}$) руб., то неизвѣстное время равно:

$$139{,}16 : (2485 \cdot \frac{7}{100}) = \frac{13916}{2485 . 7} = \frac{4}{5} \text{ (года)} = 288 \text{ дней.}$$

247*. Общія формулы. Обозначимъ начальный капиталъ a (руб.), процентную таксу p, время t (лѣтъ) и процентныя деньги x (руб.). Такъ какъ процентныя деньги за годъ составляютъ $\frac{p}{100}$ капитала, то a руб. въ годъ приносятъ $a . \frac{p}{100} = \frac{ap}{100}$ руб.; въ t лѣтъ процентныя деньги возрастаютъ въ t разъ; значитъ:

$$x = \frac{apt}{100} \quad (1).$$

По этой формулѣ вычисляются процентныя деньги; наращенный капиталъ получается прибавленіемъ процентныхъ денегъ къ начальному капиталу.

Если процентныя деньги вычисляются за нѣкоторое число дней (обозначимъ это число n), то въ формулѣ (1) на мѣстѣ t надо подставить дробь $\frac{n}{360}$; тогда получимъ:

$$x = \frac{ap . \frac{n}{360}}{100} = \frac{apn}{36000} \quad (2).$$

Формулу эту часто бываетъ выгодно представить такъ:

$$x = \frac{an}{36000 : p} \quad (3),$$

а именно тогда, когда частное $36000 : p$ есть цѣлое число, что

будетъ, напр., при слѣдующихъ часто встрѣчающихся въ практикѣ значеніяхъ p:

$p=6$......... $36000:p=6000$
$p=5$......... $36000:p=7200$
$p=4^1/_2$...... $36000:p=8000$
$p=4$......... $36000:p=9000$
$p=3,6$...... $36000:p=10000$
$p=3$......... $36000:p=12000$ и т. п.

Числа: 6000, 7200, 8000.... наз. дѣлителями, а произведеніе an—процентнымъ числомъ (или просто числомъ). Формулу (3) мы можемъ, значитъ, высказать такъ: **чтобы получить процентныя деньги съ даннаго капитала за данное число дней, надо составить процентное число, равное произведенію капитала на число дней, и раздѣлить его на соотвѣтствующаго дѣлителя.** Такъ, если $a=380$ руб., $n=65$ и $p=4\%$, то

$$x=\frac{380.65}{9000}=\frac{24700}{9000}=\frac{247}{90}=2 \text{ р. } 74 \text{ коп.}$$

Вычисленіе процентныхъ денегъ при помощи процентныхъ чиселъ и дѣлителей особенно удобно тогда, когда приходится находить сумму многихъ процентныхъ денегъ, получаемыхъ съ разныхъ капиталовъ за разное число дней, но при одной и той же таксѣ процентовъ (это часто бываетъ нужно въ банковыхъ операціяхъ). Если, напр., извѣстно, что капиталъ a_1 приносилъ процентныя деньги въ теченіе n_1 дней, капиталъ a_2—въ теченіе n_2 дней, капиталъ a_3—въ теченіе n_3 дней и т. д., то сумма этихъ процентныхъ денегъ, при одной и той же таксѣ p, выразится весьма простою формулою:

$$x=\frac{a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3+\dots}{36000:p}$$

IV. Задачи на учетъ векселей.

248. Понятіе о векселѣ и объ учетѣ. Когда одно лицо занимаетъ у другого деньги подъ проценты, то обыкновенно должникъ выдаетъ своему кредитору письменное обязательство въ томъ, что онъ къ извѣстному сроку уплатитъ занятую сумму вмѣстѣ съ причитающимися на нее процентами. Такое обязательство, написанное на гербовой бумагѣ и по установленной формѣ, называется **векселемъ**. Положимъ, напр., что должникъ занялъ у кредитора 1000 руб. на 1 годъ по 10% и заемъ былъ сдѣланъ 1-го января 1915 года. Тогда, разсчитавъ, что черезъ годъ 1000 руб. должны обратиться въ 1100 р., должникъ выдаетъ кредитору, примѣрно, такой вексель:

«Москва (названіе города), 1-го января 1915 года. Вексель на 1100 руб. Отъ сего 1-го января 1915 года, черезъ двѣнадцать мѣсяцевъ, по сему моему векселю повиненъ я заплатить (такому-то), или кому онъ прикажетъ, тысячу сто рублей, которые я отъ него получилъ наличными деньгами». (Слѣдуетъ подпись должника).

Въ векселѣ не пишется ни сумма, занятая въ дѣйствительности, ни процентъ, по которому сдѣланъ былъ заемъ; но выставляется сумма денегъ, которую надо уплатить, и срокъ, въ который должна быть сдѣлана уплата. Сумма, записанная въ векселѣ, называется вексельною суммою или **валютою векселя**. Валюта есть занятый капиталъ вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами за время, на которое былъ сдѣланъ заемъ.

Кредиторъ, имѣющій вексель, не можетъ требовать отъ должника уплаты ранѣе срока, назначеннаго въ векселѣ. Однако, можетъ случиться, что самъ должникъ пожелаетъ уплатить по векселю ранѣе срока. Положимъ, напр., что должникъ желаетъ заплатить за полгода до срока по своему

векселю въ 1100 руб. Ему нѣтъ расчета платить теперь же 1100 руб., потому что онъ могъ бы пользоваться въ теченіе полугода процентными деньгами съ тѣхъ денегъ, которыя онъ теперь предлагаетъ къ уплатѣ. Между кредиторомъ и должникомъ въ такихъ случаяхъ происходитъ соглашеніе, по которому кредиторъ долженъ получить нѣсколько менѣе вексельной суммы. Это соглашеніе выражается въ формѣ нѣкотораго числа процентовъ вексельной суммы, которое кредиторъ предоставляетъ должнику удержать изъ нея; условленная такса процентовъ обыкновенно относится къ году. Если, напр., между кредиторомъ и должникомъ произошло соглашеніе, по которому должникъ, уплачивая по векселю ранѣе срока, имѣетъ право удержать 8%, то это значитъ, что если онъ платитъ за годъ до срока, то можетъ удержать въ свою пользу $^8/_{100}$ вексельной валюты, т.-е. 8 коп. съ каждаго рубля валюты; если же онъ платитъ за $^1/_2$ года до срока, то можетъ изъ каждаго рубля валюты удержать только 4 коп.; платя за 1 мѣсяцъ до срока, удерживаетъ изъ каждаго рубля только $^8/_{12}$ или $^2/_3$ коп., и т. п.

Сумма, вычитаемая изъ валюты, когда по векселю уплачивается ранѣе срока, называется **учетомъ** (или **дисконтомъ**) векселя; опредѣлить учетъ за данное время по данному проценту значитъ **учесть** (или **дисконтировать**) вексель.

Учитывать вексель приходится еще и тогда, когда кредиторъ продаетъ вексель своего должника постороннему лицу (или банку); въ этомъ случаѣ покупатель удерживаетъ въ свою пользу ту сумму, которая придется по условленному годовому % за все время, остающееся до вексельнаго срока.

При вычисленіи учета за нѣсколько дней или мѣсяцевъ годъ принимается въ 360 дней и каждый мѣсяцъ — въ 30 дней.

249. Примѣры задачъ на учетъ векселей. Такъ какъ учетъ векселя есть ничто иное, какъ процентныя деньги, причитающіяся съ валюты по условленной годовой таксѣ за все время, недостающее до срока векселя, то задачи на учетъ векселей ничѣмъ не отличаются отъ соотвѣтственныхъ задачъ на проценты. Приведемъ нѣкоторые примѣры.

Задача 1. Вексель въ 5600 руб. уплатили за 5 мѣсяцевъ до срока съ учетомъ по 6%. Какой сдѣланъ былъ учетъ по этому векселю и сколько по нему заплатили?

Искомый учетъ представляетъ собою процентныя деньги, причитающіяся съ 5600 руб. за 5 мѣсяцевъ, считая по 6% годовыхъ. Поэтому

$$\text{учетъ}=\frac{5600.6.5}{100.12}=140 \text{ (руб.)}.$$

Слѣд., уплатили по векселю 5600—140=5460 руб.

Задача 2. За два мѣсяца до срока проданъ вексель съ учетомъ въ 148 рублей. Опредѣлить валюту векселя, если учетъ былъ сдѣланъ по 8%.

Задача эта равносильна такой задачѣ на проценты: опредѣлить начальный капиталъ, съ котораго процентныя деньги за 2 мѣсяца, считая по 8% годовыхъ, составляютъ 148 руб.

Процентныя деньги за 12 мѣс. составляютъ $^8/_{100}$ капитала; за 2 мѣсяца онѣ должны быть въ 6 разъ менѣе и потому составляютъ $^8/_{600}={}^1/_{75}$ капитала. Эта $^1/_{75}$ капитала равна 148 руб.; значитъ, капиталъ равенъ

$$148.75=11100 \text{ руб.}$$

Задача 3. За 3 мѣсяца до срока уплатили по векселю 5880 руб. Найти валюту этого векселя, если извѣстно, что учетъ былъ сдѣланъ по 8%.

Эта задача равносильна такой задачѣ на проценты: какъ великъ начальный капиталъ, если, вычтя отъ него про-

центныя деньги, причитающіяся съ этого капитала за 3 мѣсяца, считая по 8% годовыхъ, мы получимъ 5880 р.?

За 3 мѣсяца процентныя деньги составляютъ $\frac{8}{100} \cdot \frac{3}{12} = \frac{2}{100}$ начальнаго капитала; значитъ, если ихъ вычтемъ изъ него, останется $^{98}/_{100}$ капитала; эти $^{98}/_{100}$ капитала должны равняться 5880 руб.; слѣд., искомый капиталъ равенъ

$$5880 : \frac{98}{100} = \frac{588000}{98} = 6000 \text{ руб.}$$

250*. Математическій учетъ. Учетъ, описанный въ предыдущихъ параграфахъ, называется **коммерческимъ.** Есть еще особаго рода учетъ, называемый **математическимъ.** Чтобы понять разницу между ними, возьмемъ примѣръ. Пусть требуется опредѣлить учетъ по 6% съ векселя въ 800 руб., уплачиваемаго за 10 мѣс. до срока. Предварительно узнаемъ, сколько процентовъ за 10 мѣсяцевъ составляютъ 6% годовыхъ. Окажется 5%. Итакъ, за недостающее время придется учесть, удержать 5%. До сего времени мы считали, что эти 5% означаютъ 5 сотыхъ валюты векселя, т.-е., что съ каждаго рубля валюты удерживается 5 коп. Но можно понимать учетъ въ 5% иначе. Можно думать, что за вексель въ 800 руб. уплачена теперь такая сумма, которая, будучи отдана въ ростъ по 5%, обращается къ концу срока векселя въ 800 руб. Понимаемый въ такомъ смыслѣ учетъ называется математическимъ. Съ перваго раза можетъ показаться, что нѣтъ разницы между коммерческимъ и математическимъ учетами. Однако, если ближе всмотримся въ вопросъ, замѣтимъ разницу. Мы предположили, что сумма, уплачиваемая теперь за вексель, должна обратиться въ 800 р., считая по 5%; но каждый рубль, принося 5%, обращается въ 1 р. 5 коп.; поэтому въ 800 р. должны повторяться столько разъ 1 руб. 5 коп., сколько разъ въ суммѣ, уплачиваемой теперь, повторяется 1 рубль. Значитъ, при новомъ нашемъ предположеніи придется учитывать по 5 коп. изъ каждыхъ 105 коп. валюты, а не изъ каждыхъ 100 коп., какъ это дѣлается при коммер-

ческомъ учетѣ. Такъ какъ въ валютѣ 105 коп. повторяется меньшее число разъ, чѣмъ 100 коп., то, значитъ, **математическій учетъ меньше коммерческаго** (хотя и очень немного). Дѣйствительно, коммерческій учетъ за годъ съ 800 руб. по 5% равенъ 40 руб., а математическій учетъ $= 5 \times \frac{80000}{105} =$ $= 3809 \frac{11}{21}$ коп.=38 руб. $9^{11}/_{21}$ коп.

Итакъ, математическій учетъ отличается отъ коммерческаго тѣмъ, что проценты, причитающіеся за время, остающееся до вексельнаго срока, учитываются не изъ рубля валюты, какъ это дѣлается при коммерческомъ учетѣ, а изъ суммы рубля съ процентными деньгами, причитающимися на него за оставшееся время (т.-е. съ наращеннаго рубля).

На практикѣ производится всегда учетъ коммерческій *).

V. Цѣпное правило.

(Правило перевода).

253. Задача. Сколько пудовъ составятъ 100 германскихъ фунтовъ, если извѣстно, что 18,36 герм. фунта равны $9^9/_{50}$ килограмма, а 18,75 килограмма равны $45^3/_4$ русскаго фунта?

Для удобства рѣшенія расположимъ данныя такъ:

Сколько пудовъ въ 100 герм. фунтахъ,
если 18,36 герм. ф.$=9^9/_{50}$ килогр.
» 18,75 килогр.$=45^3/_4$ русск. ф.
» 40 русск. ф. =1 пуду.

(Первая строчка содержитъ вопросъ задачи, а каждая изъ остальныхъ начинается такими мѣрами, которыми оканчивается предшествующая; послѣдняя строка должна оканчиваться названіемъ мѣры, о которой говорится въ вопросѣ).

Рѣшить задачу можно различными способами. Наиболѣе удобный способъ слѣдующій.

*) §§ 251 и 252 („Правило сроковъ") въ настоящемъ изданіи выпущены по ихъ безполезности.

Обращая вниманіе на послѣднюю строчку, а затѣмъ, переходя отъ нея постепенно къ слѣдующимъ верхнимъ строчкамъ, разсуждаемъ такъ:

$$\text{Если } 40 \text{ русск. ф.} = 1 \text{ пуду,}$$

$$\text{то } 1 \text{ русск. ф.} = {}^1/_{40} \text{ пуда,}$$

$$\text{а } 45^3/_4 \text{ русск. ф.} = \frac{1.45^3/_4}{40} \text{ пуда.}$$

На $45^3/_4$ русск. ф. составляютъ 18.75 килограмма; значитъ:

$$1 \text{ килогр.} = \frac{1.45^3/_4}{40.18,75} \text{ пуда,}$$

$$\text{а } 9^9/_{50} \text{ килогр.} = \frac{1.45^3/_4.9^9/_{50}}{40.18,75} \text{ пудовъ.}$$

Но $9^9/_{50}$ килогр. составляютъ 18,36 герман. фунта; значитъ:

$$1 \text{ герм. ф.} = \frac{1.45^3/_4.9^9/_{50}}{40.18,75.18,36} \text{ пудовъ,}$$

$$\text{а } 100 \text{ герм. ф.} = \frac{1.45^3/_4.9^9/_{50}.100}{40.18,75.18,36} \text{ пудовъ,} \qquad 1]$$

$$= \frac{183.459.100.100.100}{4.50.40.1875.1836} = 3^1/_{50} \text{ пуда.}$$

Разсматривая формулу (1), легко замѣтимъ слѣдующее **правило**: расположивъ вопросъ и условія задачи такъ, какъ было указано выше, слѣдуетъ **произведеніе чиселъ, которыми оканчиваются строчки, раздѣлить на произведеніе чиселъ, которыми онѣ начинаются.**

Правило рѣшать подобныя задачи наз. **цѣпнымъ**, потому что, располагая данныя, какъ было указано выше, мы получаемъ изъ всѣхъ строчекъ подобіе цѣпи (причемъ строчки уподобляются отдѣльнымъ звеньямъ). Правило это лучше называть правиломъ **перевода**, потому что въ задачахъ на это правило мѣры одного государства требуется перевести на мѣры другого.

IV. Задачи на пропорціональное дѣленіе.

254. Задача 1. Раздѣлить 84 на три части пропорціонально числамъ 7, 5 и 2.

Это надо понимать такъ: раздѣлить 84 на такія три части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 7 къ 5, а вторая къ третьей, какъ 5 къ 2. Назовемъ искомыя части буквами x_1, x_2 и x_3. Въ задачѣ требуется, чтобы эти части могли удовлетворить слѣдующимъ двумъ пропорціямъ:

$$x_1 : x_2 = 7 : 5 \dots (1) \qquad x_2 : x_3 = 5 : 2 \dots (2).$$

Изъ этихъ пропорцій можно вывести такое заключеніе: если число x_1 разобьемъ на 7 равныхъ долей, то такихъ долей въ x_2 должно быть 5, потому что только при этомъ условіи отношеніе x_1 къ x_2 равно отношенію 7 : 5; такихъ же долей въ x_3 должно быть 2, потому что только при этомъ условіи отношеніе x_2 къ x_3 равно отношенію 5 : 2. Отсюда слѣдуетъ, что седьмая доля x_1 въ суммѣ $x_1+x_2+x_3$ содержится 7+5+2 раза, т.-е. 14 разъ. Но сумма $x_1+x_2+x_3$ должна составлять 84; значитъ, седьмая доля x_1 равна 84 : 14=6. Такихъ долей заключается 7 въ x_1, 5 въ x_2 и 2 въ x_3; слѣд.:

$$x_1 = 6.7 = 42;\ x_2 = 6.5 = 30;\ x_3 = 6.2 = 12.$$

Правило. Чтобы раздѣлить число на части пропорціонально нѣсколькимъ даннымъ числамъ, достаточно раздѣлить его на сумму этихъ чиселъ и частное умножить на каждое изъ этихъ чиселъ.

Замѣчаніе. Изъ пропорцій (1) и (2) можно вывести— такую третью пропорцію:

$$x_1 : x_3 = 7 : 2 \dots (3).$$

Дѣйствительно, мы видѣли, что если x_1 разбить на 7 равныхъ долей, то такихъ долей въ x_3 должно быть 2; поэтому отношеніе x_1 къ x_3 равно отношенію 7 : 2.

Три написанныя выше пропорціи можно написать сокращенно въ одинъ рядъ такъ:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 7 : 5 : 2.$$

255. Задача 2. Раздѣлить 968 на 4 части пропорціонально числамъ:

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{2}{5} : \frac{3}{8}.$$

Прежде всего замѣнимъ данный рядъ дробныхъ чиселъ рядомъ цѣлыхъ чиселъ. Для этого приведемъ всѣ дроби къ общему знаменателю и обратимъ смѣшанную дробь въ неправильную:

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{60}{40} : \frac{30}{40} : \frac{16}{40} : \frac{15}{40}.$$

Если откинемъ общаго знаменателя, то увеличимъ каждую дробь въ одинаковое число разъ (именно въ 40 разъ); отъ этого отношенія между ними не измѣнятся; слѣд.:

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = 60 : 30 : 16 : 15.$$

Теперь задачу можно выразить такъ: раздѣлить 968 на 4 части пропорціонально числамъ 60 : 30 : 16 : 15. Эта задача рѣшается такъ, какъ и 1-я.

256. Задача 3. Раздѣлить 125 на такія 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 2 : 3, вторая къ третьей, какъ 3 : 5, а третья къ четвертой, какъ 5 : 6.

Задача 4. Раздѣлить 125 на такія 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 2 : 3, вторая къ третьей, какъ 4 : 5, а третья къ четвертой, какъ 6 : 11.

Въ каждой изъ этихъ задачъ даны отношенія между частями и сумма частей, а отыскиваются самыя части. Однако есть существенная разница между этими задачами. Въ первой задачѣ отношенія:

2 : 3, 3 : 5 и 5 : 6

таковы, что послѣдующій членъ перваго отношенія равенъ предыдущему члену второго, а послѣдующій членъ второго отношенія равенъ предыдущему члену третьяго. Вслѣдствіе этого можно сказать, что въ первой задачѣ требуется 125 раздѣлить на 4 части пропорціонально ряду чиселъ 2 : 3 : 5 : 6. Значитъ, эта задача ничѣмъ не отличается отъ задачи 1-й.

Во второй задачѣ отношенія между частями

$$2 : 3, \quad 4 : 5 \quad \text{и} \quad 6 : 11$$

таковы, что послѣдующій членъ одного отношенія не равенъ предыдущему члену слѣдующаго отношенія.

Однако этотъ случай легко привести къ первому, напр., такъ. Обозначивъ искомыя части буквами x_1, x_2, x_3 и x_4, мы можемъ написать слѣдующія три пропорціи:

$$x_1 : x_2 = 2 : 3$$
$$x_2 : x_3 = 4 : 5$$
$$x_3 : x_4 = 6 : 11$$

Изъ первой пропорціи видимъ, что если x_1 разобьемъ на 2 равныя доли, то такихъ долей въ x_2 должно быть 3. Узнаемъ теперь, сколько такихъ же долей должно содержаться въ x_3 и въ x_4 Изъ второй пропорціи (которую можно переписать такъ: $x_3 : x_2 = 5 : 4$) видимъ, что x_3 составляетъ $^5/_4\, x_2$; но въ x_2 заключается 3 равныя доли; значитъ, въ x_3 такихъ долей будетъ $3 \times {}^5/_4$ т.-е. $^{15}/_4$ Изъ третьей пропорціи (которую можно написать такъ: $x_4 : x_3 = 11 : 6$) видимъ, что x_4 составляетъ $^{11}/_6\, x_3$, но въ x_3 заключается равныхъ долей $^{15}/_4$; значитъ въ x_4 такихъ долей будетъ $^{15}/_4 \times {}^{11}/_6$, т.-е. $^{55}/_8$. Итакъ, въ x_4 содержится $^{55}/_8$ такихъ равныхъ долей, какихъ въ x_3 содержится $^{15}/_4$, въ x_2 сод. 3, а въ x_1 сод. 2. Значитъ, для рѣшенія задачи достаточно число 125 раздѣлить на 4 части пропорціонально ряду чиселъ:

$$2 : 3 : \frac{15}{4} : \frac{55}{8}.$$

Умноживъ всѣ эти числа на 8, мы можемъ замѣнить этотъ рядъ рядомъ цѣлыхъ чиселъ:

$$16 : 24 : 30 : 55.$$

Такимъ образомъ задача приводится къ задачѣ 1-й.

Замѣчаніе. Если бы члены данныхъ отношеній были выражены дробными числами, то полезно эти отношенія предварительно замѣнить отношеніями цѣлыхъ чиселъ.

257*. Задача 5. Раздѣлить число a на 3 части обратно пропорціонально числамъ m, n и p.

Это значитъ, что число a требуется раздѣлить на такія 3 части, чтобы первая часть относилась ко второй, не какъ m къ n, а какъ $n : m$, а вторая къ третьей не какъ $n : p$, а какъ $p : n$. Назвавъ искомыя части x_1, x_2 и x_3, можемъ выразить требованія задачи такими пропорціями:

$$x_1 : x_2 = n : m$$
$$x_2 : x_3 = p : n.$$

Но отношеніе $n : m$ можно замѣнить равнымъ ему отношеніемъ $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$; точно такъ же $p : n$ можно замѣнить $\frac{1}{n} : \frac{1}{p}$; тогда получимъ:

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{m} : \frac{1}{n};$$
$$x_2 : x_3 = \frac{1}{n} : \frac{1}{p};$$

откуда видно, что части x_1, x_2 и x_3 должны быть прямо пропорціональны числамъ $\frac{1}{m} : \frac{1}{n} : \frac{1}{p}$. Итакъ, **чтобы раздѣлить число на части обратно пропорціонально даннымъ числамъ, надо раздѣлить его прямо пропорціонально числамъ, обратнымъ даннымъ.**

Примѣромъ задачъ подобнаго рода можетъ служить такая:

капиталъ въ 10150 руб. раздѣленъ на 3 части и каждая часть отдана въ ростъ: первая часть по $5^0/_0$, вторая по $6^0/_0$, а третья по $6^1/_2{}^0/_0$. Какъ велики эти части, если извѣстно, что каждая часть приноситъ ежегодно одинаковый доходъ?

Такъ какъ проц. деньги за годъ одинаковы для всѣхъ частей, то очевидно, что искомыя части обратно пропорціональны процентнымъ таксамъ. Значитъ, 10150 руб. надо раздѣлить на 3 части обратно пропорціонально числамъ $5 : 6 : 6^1/_2$ или прямо пропорціонально числамъ $\frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{2}{13}$. Приведя эти дроби къ общему знаменателю и откинувъ послѣдній, получимъ цѣлыя числа 78 : 65 : 60, пропорціонально которымъ надо раздѣлить 10150 руб.

258. Задача 6. Три купца составили товарищество для веденія нѣкотораго торговаго дѣла. Первый купецъ внесъ для этой цѣли 15000 руб., второй—10000 руб., третій—12500 руб. По окончаніи торговаго дѣла они получили общей прибыли 7500 руб. Спрашивается, сколько изъ этой прибыли придется получить каждому купцу?

Такъ какъ прибыль на каждый внесенный рубль должна получиться одинаковая, то прибыль каждаго участника въ товариществѣ пропорціональна капиталу, внесенному имъ. Поэтому задача сводится на такую: раздѣлить 7500 на три части пропорціонально числамъ 15000, 10000 и 12500; а это есть задача на пропорціональное дѣленіе. Чтобы рѣшить ее, прежде всего замѣтимъ, что числа ряда 15000 : 10000 : 12500 можно раздѣлить на одно и то же число (на 2500); отъ этого не измѣнятся отношенія между ними. Сокративъ, получимъ 6 : 4 : 5. Теперь раздѣлимъ 7500 на три части пропорціонально 6 : 4 : 5. Разсуждая такъ, какъ было объяснено въ задачѣ 1, найдемъ:

$$x_1 = \frac{7500}{15} . 6 = 3000; \quad x_2 = \frac{7500}{15} . 4 = 2000; \quad x_3 = \frac{7500}{15} . 5 = 2500.$$

Правило пропорціональнаго дѣленія называется иногда

правиломъ товарищества, потому что помощью этого правила рѣшаются, между прочимъ, такія задачи, въ которыхъ, подобно сейчасъ рѣшенной, требуется раздѣлить общую прибыль между нѣсколькими лицами, составившими товарищество для общаго коммерческаго предпріятія.

259. Задача 7. На желѣзной дорогѣ работало 3 артели рабочихъ; въ первой артели было 27 рабочихъ, во второй—32, въ третьей—15; первая артель работала 20 дней, вторая—18, третья—16; всѣ три артели получили за работу 4068 руб. Сколько рублей придется получить каждой артели?

Если бы каждая артель работала одинаковое число дней, то плата каждой артели была бы пропорціональна числу рабочихъ въ ней; поэтому преобразуемъ условія нашей задачи такимъ образомъ, чтобы число дней работы для каждой артели было одинаково. Напр., предположимъ, что каждая артель работала бы по одному дню; тогда, конечно, уменьшилась бы плата каждой артели; для того, чтобы эта плата не измѣнилась, надо, чтобы число рабочихъ въ каждой артели увеличилось во столько разъ, во сколько число дней уменьшилось. Такъ, чтобы первой артели получить за 1 день ту же плату, какую она получаетъ за 20 дней, надо, чтобы въ этой артели рабочихъ было не 27, а 27×20; также во второй артели должно быть рабочихъ не 32, а 32×18, чтобы эта артель получила за 1 день такую же плату, какъ и за 18 дней; въ третьей артели должно быть рабочихъ 15×16, чтобы и эта артель получила ту же плату за 1 день, какъ и за 16 дней. Теперь получаемъ такіе два ряда чиселъ:

числа рабочихъ	(27×20) :	(32×18) :	(15×16)
» дней	1	1	1

Остается раздѣлить 4068 на части пропорціонально числамъ рабочихъ. Сокративъ предварительно эти числа (на 3 и на 4), найдемъ, что 4068 надо раздѣлить пропор-

ціонально 45 : 48 : 20. Обозначивъ искомыя части буквами x_1, x_2 и x_3 получимъ, какъ было прежде объяснено:

$$x_1 = \frac{4068 \,.\, 45}{45+48+20} = \frac{4068 \,.\, 45}{113} = 36 \,.\, 45 = 1620 \text{ (руб.)},$$

$$x_2 = \frac{4068 \,.\, 48}{113} = 36 \,.\, 48 = 1728 \text{ (руб.)}.$$

$$x_3 = \frac{4068 \,.\, 20}{113} = 36 \,.\, 20 = 720 \text{ (руб.)}.$$

Вмѣсто того, чтобы приводить къ 1 числа дней, мы могли бы привести къ 1 числа рабочихъ; тогда мы должны были бы задаться вопросомъ: если бы вмѣсто каждой артели было только по одному рабочему, то сколько дней долженъ былъ бы работать этотъ рабочій, чтобы получить ту же самую плату? Очевидно, что рабочій, замѣняющій первую артель, долженъ былъ бы работать (20×27) дней, вторую—(18×32) дней, третью—(16×15) дней. Тогда пришлось бы 4068 дѣлить на части пропорціонально только числу дней.

Можетъ случиться, что въ задачѣ даны 3 и болѣе ряда чиселъ, пропорціонально которымъ требуется раздѣлить данное число. Если бы, напр., въ предыдущей задачѣ сказано было, что первая артель работала ежедневно столько-то часовъ, вторая столько-то и третья столько-то, то пришлось бы плату дѣлить пропорціонально: во-1) числамъ рабочихъ, во-2) числамъ дней и въ-3) числамъ часовъ. Тогда нужно было бы два ряда чиселъ привести къ 1, напр., предположить, что каждая артель работаетъ 1 день по 1 часу.

VII. Задачи на смѣшеніе и сплавы.

260. Задача 1. Смѣшано три сорта муки: 15 фунт. по 8 коп., 20 фунт. по 7 коп. и 25 фунт. по 4 коп. за фунтъ. Что стоитъ фунтъ смѣси?

Узнаемъ сначала, что стоятъ всѣ фунты 1-го сорта; всѣ фунты 2-го сорта и всѣ фунты 3-го сорта; потомъ— что стоитъ вся смѣсь; затѣмъ—сколько фунтовъ во всей смѣси, наконецъ—цѣну одного фунта смѣси:

15 ф. по 8 коп. стоятъ 8.15=120 коп.
20 ф. по 7 коп. » 7.20=140 »
25 ф. по 4 коп. » 4.25=100 »
Вся смѣсь стоитъ . . . 360 »

Всѣхъ фунтовъ въ смѣси: 15+20+25=60.
Цѣна одного фунта смѣси: 360 : 60=6 коп.

Подобнымъ образомъ рѣшаются такія задачи, въ которыхъ даны цѣна и количество каждаго сорта смѣшиваемыхъ веществъ, а отыскивается цѣна единицы смѣси. Такія задачи называются задачами на смѣшеніе 1-го рода.

261. Задача 2. Изъ двухъ сортовъ чаю составлено 32 фунта смѣси; фунтъ перваго сорта стоитъ 3 руб., фунтъ второго сорта—2 руб. 40 коп. Сколько фунтовъ взято отъ того и другого сорта, если фунтъ смѣшаннаго чаю стоитъ 2 р. 85 к. (безъ прибыли и убытка)?

Способъ 1-й. Продавая дорогой сортъ по 2 р. 85 к., продавецъ будетъ получать убытка на каждомъ фунтѣ 15 коп. (3 р.—2 р. 85 к.); продавая дешевый сортъ по 2 р. 85 к., продавецъ будетъ получать прибыли на каждомъ фунтѣ 45 к. (285—240). Если бы убытокъ отъ фунта дорогого сорта былъ равенъ прибыли отъ фунта дешеваго сорта, тогда, чтобы убытокъ покрылся прибылью, надо было бы взять дорогого сорта столько же, сколько и дешеваго. Но въ нашей задачѣ убытокъ отъ фунта дорогого сорта меньше прибыли отъ фунта дешеваго сорта; изъ этого надо заключить, что, для покрытія убытка прибылью, дорогого сорта должно взять болѣе, чѣмъ дешеваго, и во столько разъ, во сколько разъ 45 больше 15.

Значитъ, 32 фунта надо раздѣлить на двѣ части пропорціонально 45 : 15 (или 3 : 1); первая часть покажетъ сколько фунтовъ должно взять отъ дорогого сорта, а вторая—сколько фунтовъ должно взять отъ дешеваго сорта. Обозначивъ число фунтовъ дорогого сорта черезъ x_2, будемъ имѣть, по правилу пропорціональнаго дѣленія:

$$x_1 = \frac{32}{3+1} \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24; \; x_2 = 8.1 = 8.$$

Итакъ, для того, чтобы при смѣшеніи не имѣть ни прибыли, ни убытка, **количества двухъ смѣшиваемыхъ сортовъ должны быть обратно пропорціональны числамъ, показывающимъ прибыль или убытокъ на единицѣ каждаго сорта.**

*Способъ 2-й. Предположимъ, что всѣ 32 фунта взяты отъ какого-нибудь одного сорта, напр., отъ 1-го. Тогда смѣсь будетъ стоить дороже, чѣмъ требуется, потому что составлена только изъ дорогого сорта. Узнаемъ, на сколько дороже. Одинъ фунтъ 1-го сорта дороже фунта требуемой смѣси на 15 коп. (потому что 3 руб. больше 2 р. 85 коп. на 15 коп.); значитъ, 32 фунта 1-го сорта будутъ стоить дороже 32 фун. требуемой смѣси на 15×32, т.-е. на 480 коп. Чтобы понизить стоимость смѣси, надо нѣсколько фунтовъ дорогого сорта замѣнить столькими же фунтами болѣе дешеваго сорта. Если одинъ фунтъ 1-го сорта замѣнимъ фунтомъ 2-го сорта, то стоимость смѣси понизится на 60 коп. (3 р.—2 р. 40 к.=60 к.); значитъ, чтобы понизить стоимость смѣси на 480 к., надо замѣнить столько фунтовъ 1-го сорта вторымъ сортомъ, сколько разъ 60 к. содержится въ 480 к., т.-е. 8 фунтовъ (480 : 60=8). Если 8 фунтовъ 1-го сорта замѣнимъ вторымъ сортомъ, то перваго сорта останется 32—8, т.-е. 24 фунта. Итакъ, для составленія смѣси надо взять 24 ф. 1-го сорта и 8 ф. 2-го сорта.

Задачи, въ которыхъ дана цѣна единицы каждаго смѣшиваемаго вещества, цѣна единицы смѣси и количество смѣси, а отыскивается количество смѣшиваемыхъ веществъ, называются *задачами на смѣшеніе 2-го рода.*

Вмѣсто цѣны единицы смѣси можетъ быть дана стоимость всей смѣси; но это обстоятельство не можетъ измѣнить пріема рѣшенія, потому что, зная количество смѣси и ея стоимость, легко опредѣлимъ (дѣленіемъ) цѣну одной единицы смѣси.

Замѣтимъ, что задачи на смѣшеніе 2-го рода возможны только тогда, когда цѣна единицы смѣси заключается между цѣною единицы 1-го рода и цѣною единицы 2-го рода. Напр., было бы невозможно составить смѣсь чаю, безъ прибыли и убытка, цѣною по 3 руб. 20 к. за фунтъ изъ двухъ сортовъ чаю, цѣною по 3 руб. и по 2 руб. 40 коп. за фунтъ.

262*. **Неопредѣленныя задачи на смѣшеніе.** Если въ задачахъ на смѣшеніе 2-го рода дано для смѣшенія более двухъ сортовъ веществъ, то задача становится неопредѣленною, т.-е. такая задача допускаетъ безчисленное множество рѣшеній. Это станетъ понятнымъ изъ слѣдующаго примѣра: составить смѣсь вина въ 40 ведеръ, цѣною по 5 руб. 50 коп. за ведро, изъ трехъ сортовъ вина: по 6 руб., по 5 руб. и по 4 р. 80 к. за ведро. Цѣна одного ведра смѣси заключается, какъ видно, между цѣною ведра 1-го сорта и цѣною ведра 2-го сорта; съ другой стороны, она заключается между цѣною ведра 1-го сорта и цѣною ведра 3-го сорта. Поэтому мы можемъ составить требуемую смѣсь, смѣшивая вино 1-го сорта со вторымъ или вино 1-го сорта съ третьимъ. Допустимъ, что мы какую-нибудь часть 40 ведеръ составили смѣшеніемъ первыхъ двухъ сортовъ, а оставшуюся часть 40 ведеръ составили смѣшеніемъ 1-го и 3-го сортовъ; смѣшавъ обѣ эти смѣси, получимъ требуемую смѣсь. Итакъ вотъ пріемъ для рѣшенія предложенной задачи: надо разбить 40 ведеръ на какія-нибудь двѣ части, и одну изъ этихъ частей составить смѣшеніемъ 1-го сорта со 2-мъ, а другую—смѣшеніемъ 1-го сорта съ 3-мъ. Такъ какъ дѣлить на двѣ части 40 ведеръ мы можемъ безчисленнымъ множествомъ способовъ, то очевидно, что предложенная задача—неопредѣленная.

263. **Задачи на смѣшеніе жидкостей.** Если говорятъ: «вино въ 48 градусовъ», то это надо понимать

такъ, что въ каждыхъ 100 объемныхъ частяхъ этого вина содержится 48 частей чистаго спирта, а остальныя 52 части составляетъ вода; значитъ, **число градусовъ означаетъ процентное объемное содержаніе чистаго спирта**; иначе сказать, оно означаетъ, сколько **сотыхъ долей объема смѣси** приходится на чистый спиртъ. Задачи на смѣшеніе такихъ жидкостей, которыхъ качество выражается числомъ градусовъ, можно подраздѣлить тоже на 2 рода, подобно задачамъ, разсмотрѣннымъ выше. Приведемъ примѣры.

Задача 1. 30 ведеръ вина въ 48 градусовъ смѣшано съ 24 ведрами вина въ 36 градусовъ. Сколько градусовъ въ смѣси?

Въ каждомъ ведрѣ 1-го сорта заключается 48 сотыхъ ведра чистаго спирта. Значитъ, въ 30 ведрахъ 1-го сорта чистаго спирта содержится 48×30, т.-е. 1440 сотыхъ ведра. Въ 24 ведрахъ 2-го сорта чистаго спирта заключается 36×24, т.-е. 864 сотыхъ ведра. Во всей смѣси чистаго спирта будетъ 1440+864, т.-е. 2304 сотыхъ ведра. Такъ какъ всѣхъ ведеръ вина въ смѣси 30+24, т.-е. 54 ведра, то въ каждомъ ведрѣ смѣси чистаго спирта будетъ 2304 : 54, т.-е. $42^2/_3$ сотыхъ ведра. Значитъ, смѣсь окажется въ $42^2/_3$ градуса.

Задача 2. Желаютъ составить смѣсь изъ вина двухъ сортовъ: въ 48 град. и въ 36 град. Сколько надо взять того и другого, чтобы составить 10 ведеръ вина въ 45 град.?

Такъ какъ ведро 1-го сорта содержитъ спирта на 3 сотыхъ ведра болѣе, а ведро 2-го сорта на 9 сотыхъ менѣе, чѣмъ требуется, то 1-го сорта должно взять болѣе, чѣмъ 2-го, во столько разъ, во сколько 9 болѣе 3. Значитъ, 10 ведеръ надо раздѣлить на 2 части пропорціонально числамъ 9 : 3 или 3 : 1.

1-го сорта надо взять: $\frac{10}{3+1} . 3=7\frac{1}{2}$; 2-го сорта: $\frac{10}{3+1} . 1=2\frac{1}{2}$.

264. Задачи на сплавы металловъ. Золото и серебро, по причинѣ своей мягкости, не употребляются

на изделія въ чистомъ видѣ, но сплавляются съ какими-либо другими болѣе твердыми металлами (чаще всего съ мѣдью). Сплавленные съ золотомъ или серебромъ посторонніе металлы называются **лигатурой.** Количество чистаго золота или чистаго серебра выражается **пробой.** У насъ чаще всего принято, что **проба означаетъ, сколько вѣсовыхъ частей чистаго металла содержится въ 96 вѣсовыхъ частяхъ сплава.**

Напр., золото 56-й пробы есть такой сплавъ, въ которомъ на 96 вѣсовыхъ частей приходится 56 частей чистаго золота, а остальныя части—лигатура. Такъ какъ въ фунтѣ 96 золотниковъ, а въ золотникѣ—96 долей, то можно сказать, что проба означаетъ, сколько золотниковъ чистаго металла содержится въ фунтѣ сплава, или сколько долей—въ одномъ золотникѣ.

Задачи на сплавы металловъ, которыхъ качество выражается пробой, можно подраздѣлить на 2 рода, подобно задачамъ на смѣшеніе, разсмотрѣннымъ выше. Приведемъ примѣры.

Задача 1. 25 фун. серебра 84 пробы сплавлены съ $12^1/_2$ фун. серебра 72-й пробы. Какой пробы сплавъ?

Въ каждомъ фунтѣ 1-го сорта заключается 84 золот. чистаго серебра. Въ 25 фунтахъ того же сорта содержится 84×25, т.-е. 2100 зол. чистаго серебра. Въ $12^1/_2$ фунтахъ 2-го сорта чистаго серебра заключается $72 \times 12^1/_2$, т.-е. 900 зол. Значитъ, во всемъ сплавѣ чистаго серебра будетъ $2100+900$, т.-е. 3000 зол. Такъ какъ всѣхъ фунтовъ въ сплавѣ $25+12^1/_2$, т.-е. $37^1/_2$, то въ каждомъ фунтѣ сплава чистаго серебра будетъ $3000 : 37^1/_2$, т.-е. 80 золотниковъ. Слѣд., сплавъ окажется 80-й пробы.

Задача 2. Сколько нужно взять золота 91-й и $87^1/_2$ пробы, чтобы составить слитокъ въ 2 фунта 8 золотниковъ 88,9 пробы?

Такъ какъ 1 золотникъ 1-го сорта содержитъ чистаго золота болѣе, чѣмъ требуется, на 2,1 доли, а 1 золотникъ 2-го сорта содержитъ менѣе на 1,4 доли, то 1-го сорта надо взять меньше 2-го въ отношеніи 1,4 : 2,1. Значитъ, 200 золотниковъ надо раздѣлить на 2 части пропорціонально 1,4 : 2,1, или 14 : 21, или 2 : 3.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Приближенныя вычисленія.

1. Иногда случается, что, производя какое-либо дѣйствіе надъ десятичными числами, мы не интересуемся точнымъ результатомъ этого дѣйствія, а желаемъ получить только нѣсколько первыхъ его десятичныхъ знаковъ; въ такомъ случаѣ вмѣсто данныхъ чиселъ можемъ брать другія, выраженныя меньшимъ числомъ цыфръ, и производить дѣйствія сокращеннымъ способомъ. Цѣль этой главы— указать сокращенные способы сложенія, вычитанія, умноженія и дѣленія десятичныхъ чиселъ.

2. Опредѣленіе. Если, желая получить приближенный результатъ дѣйствія, мы вмѣсто числа A беремъ другое a, то послѣднее наз. *приближеніемъ* числа A *съ недостаткомъ*, если $a<A$, и *съ избыткомъ*, если $a>A$. Число A, по отношенію къ своему приближенію, наз. тогда *точнымъ* числомъ.

Погрѣшностью приближенія наз. разность между этимъ приближеніемъ и точнымъ числомъ *). Такъ, погрѣшность чиселъ 52 и 56, разсматриваемыхъ какъ приближенія числа 54, есть 2.

*) Такая погрѣшность наз. абсолютной въ отличіе отъ относительной погрѣшности, подъ которою разумѣютъ отношеніе абсолютной погрѣшности къ точному числу.

Часто случается, что точная величина погрѣшности остается неизвѣстной, а извѣстно только, что она меньше дроби $1/n$; тогда говорятъ, что это приближеніе **точно до** $1/n$. Дробь $1/n$ наз. тогда **верхнимъ предѣломъ** погрѣшности. Точное число A заключается тогда между a и $a+1/n$, если приближеніе a взято съ недостаткомъ, и между a и $a-1/n$, если оно взято съ избыткомъ. Если неизвѣстно, взято ли приближеніе a съ недостаткомъ, или съ избыткомъ, то тогда можемъ только утверждать, что A заключено между $a-1/n$ и $a+1/n$.

3. Когда имѣютъ дѣло съ десятичными числами, то приближенія ихъ обыкновенно берутъ съ точностью до десятичной единицы какого-либо разряда: до $1/_{10}$, до $1/_{100}$ и т. д. и даже съ точностью до $1/_2$ десятичной единицы. Такія приближенія легко находятся по слѣдующимъ правиламъ:

1) Чтобы получить приближеніе съ недостаткомъ даннаго десятичнаго числа (съ конечнымъ или безконечнымъ числомъ десятичныхъ знаковъ) съ точностью до одной десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно отбросить въ числѣ всѣ цыфры, стоящія вправо отъ той, которая выражаетъ единицы этого разряда.

Такъ, приближеніе съ недостаткомъ числа 3,14159265... съ точностью до $1/_{100}$ есть 3,14, потому что во-1) послѣднее число меньше даннаго, и во-2) погрѣшность, равная 0,159265... **сотой**, меньше 0,99999... сотой, т.-е. меньше 1 сотой.

2) Чтобы получить приближеніе съ избыткомъ даннаго десятичнаго числа съ точностью до одной десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно, отбросивъ въ числѣ всѣ цыфры, стоящія вправо отъ той, которая выражаетъ единицы этого разряда, увеличить на 1 послѣднюю изъ удержанныхъ цыфръ.

Такъ, приближеніе съ избыткомъ числа 3,14159265... съ точностью до 0,001 есть 3,142, потому что во-1) по-

слѣднее число больше даннаго и во-2) погрѣшность его меньше 0,001.

3) Чтобы получить приближеніе даннаго десятичнаго числа съ точностью до $^1/_2$ десятичной единицы какого-либо разряда, достаточно, поступивъ такъ, какъ было выше сказано въ правилѣ 1-мъ, увеличить на 1 послѣднюю изъ удержанныхъ цыфръ, если первая изъ отброшенныхъ цыфръ есть 5 или больше 5-ти, а въ противномъ случаѣ оставить ее безъ измѣненія.

Такъ, приближеніе (съ нед.) числа 3,141592... съ точностью до $^1/_2$ сотой есть 3,14, такъ какъ погрѣшность менѣе 0,5 сотой; приближеніе того же числа (съ изб.) съ точностью до $^1/_2$ тысячной есть 3,142, такъ какъ погрѣшность, равная 1—0,592... тысячной, очевидно, меньше 0,5 тысячной.

4. Нѣкоторыя теоремы о погрѣшностяхъ.

Замѣтимъ, что если a есть приближеніе числа A, при чемъ погрѣшность равна α, то $A=a+\alpha$, если приближеніе взято съ недостаткомъ, и $A=a-\alpha$, если оно взято съ избыткомъ.

Укажемъ нѣкоторыя теоремы, которыя намъ понадобятся далѣе.

I. Если всѣ слагаемыя взяты съ недостаткомъ или всѣ съ избыткомъ, то погрѣшность суммы равна суммѣ погрѣшностей слагаемыхъ.

Такъ, если A, B и C суть точныя числа, а a, b и c ихъ приближенія, всѣ съ недостаткомъ или всѣ съ избыткомъ, при чемъ соотвѣтствующія погрѣшности будутъ α, β и γ, то

$$A=a\pm\alpha, \qquad B=b\pm\beta, \qquad C=c\pm\gamma,$$

гдѣ знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи, т.-е. если въ одномъ случаѣ взять знакъ + (или минусъ), то и во всѣхъ прочихъ случаяхъ долженъ быть взятъ тотъ же знакъ. Слѣд.:

$$A+B+C=(a+b+c)\pm(\alpha+\beta+\gamma).$$

Отсюда видно, что суммы $A+B+C$ и $a+b+c$ разнятся между собою на $\alpha+\beta+\gamma$.

Если нѣкоторыя слагаемыя взяты съ недостаткомъ, а другія съ избыткомъ, то погрѣшность суммы, очевидно, менѣе суммы погрѣшностей слагаемыхъ. Если остается неизвѣстнымъ, взяты ли приближенія съ недостаткомъ, или съ избыткомъ, то можемъ только утверждать, что **погрѣшность суммы не болѣе суммы погрѣшностей слагаемыхъ.**

II. Если уменьшаемое и вычитаемое взяты оба съ недостаткомъ или оба съ избыткомъ, то погрѣшность разности равна разности погрѣшностей уменьшаемаго и вычитаемаго.

Такъ, если $A=a\pm\alpha$ и $B=b\pm\beta$, при чемъ знаки $\pm$ находятся въ соотвѣтствіи, то:

$$A-B=a\pm\alpha-b\mp\beta=(a-b)\pm\alpha\mp\beta.$$

Отсюда видно, что разности $A-B$ и $a-b$ разнятся между собою на $\alpha-\beta$ или на $\beta-\alpha$ (если $\beta>\alpha$).

Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ остается неизвѣстнымъ, будетъ ли приближенная разность съ недостаткомъ, или съ избыткомъ.

Когда одно изъ приближеній взято съ недостаткомъ, а другое—съ избыткомъ, то погрѣшность разности равна суммѣ погрѣшностей данныхъ чиселъ; значитъ, въ случаѣ, когда характеръ приближеній неизвѣстенъ, можно только утверждать, что **погрѣшность разности не болѣе суммы погрѣшностей данныхъ чиселъ.**

III. Если одинъ изъ двухъ сомножителей есть число точное, а другой—приближенное, то погрѣшность произведенія равна произведенію погрѣшности приближеннаго сомножителя на точнаго сомножителя.

Такъ, если $A=a\pm\alpha$, то $Am=am\pm\alpha m$; откуда видно, что Am и am разнятся между собою на αm.

Произведеніе окажется съ недостаткомъ, если приближенный сомножитель взять съ недостаткомъ, и съ избыткомъ въ противномъ случаѣ.

IV. Если дѣлитель есть число точное, а дѣлимое—приближенное, то погрѣшность частнаго равна частному отъ дѣленія погрѣшности дѣлимаго на дѣлителя.

Такъ, если $A=a\pm\alpha$, то $\frac{A}{m}=\frac{a}{m}\pm\frac{\alpha}{m}$; откуда видно, что частныя $\frac{A}{m}$ и $\frac{a}{m}$ разнятся между собою на $\frac{\alpha}{m}$.

Частное окажется съ недостаткомъ, если дѣлимое взято съ недостаткомъ, и съ избыткомъ въ противномъ случаѣ.

Приближенное сложеніе.

5. Правило. Чтобы получить сумму нѣсколькихъ десятичныхъ чиселъ съ точностью до одной единицы даннаго разряда, достаточно, когда слагаемыхъ не болѣе 11, въ каждомъ изъ нихъ отбросить всѣ цыфры, слѣдующія за тѣмъ разрядомъ, единицы котораго въ 10 разъ менѣе единицы даннаго разряда, сложить полученныя приближенія, отбросить послѣднюю цыфру результата и увеличить на 1 предпослѣднюю его цыфру.

3,14159.
9,8696..
3,183...
34,557512
13,011...
31,7736
―――――
95,534
95,54.

Такъ, поступая по этому правилу въ данномъ примѣрѣ, получимъ приближенную сумму 95,54 съ точностью до 0,01.

Объясненіе. Отбрасывая десятичные знаки, начиная съ 4-го, мы дѣлаемъ въ каждомъ слагаемомъ погрѣшность, меньшую 0,001, и беремъ приближенія всѣ съ недостаткомъ. Въ такомъ случаѣ погрѣшность приближенной

суммы 95,534, равная суммѣ погрѣшностей слагаемыхъ будетъ менѣе 11-ти тысячныхъ, если слагаемыхъ не болѣе 11-ти. Отбросивъ въ результатѣ послѣднюю цыфру, мы еще уменьшаемъ сумму, но не болѣе, какъ на 9 тысячныхъ; значитъ, наибольшая погрѣшность числа 95,53 менѣе 11+9 тысячныхъ, т.е. менѣе 20 тыс. или 2 сотыхъ. Увеличивъ цыфру сотыхъ на 1, мы увеличиваемъ сумму на 1 сотую; значитъ, на столько же уменьшаемъ погрѣшность, вслѣдствіе чего погрѣшность числа 95,54 менѣе 2—1 сотой, т.-е. менѣе 1 сотой.

Когда слагаемыхъ болѣе 11, но менѣе 102, то въ каждомъ изъ нихъ должно отбросить всѣ десятичные знаки, слѣдующіе за тѣмъ разрядомъ, единицы котораго въ 100 разъ меньше единицы даннаго разряда.

Приближенное вычитаніе.

6. Правило. Чтобы получить разность двухъ десятичныхъ чиселъ съ точностью до одной единицы даннаго разряда, достаточно отбросить въ данныхъ числахъ всѣ цыфры, слѣдующія за единицами этого разряда, и найти разность полученныхъ приближеній.

−5,084 . . .	Напр., поступая по этому правилу въ данномъ
2,773 . . .	примѣрѣ, получимъ приближенную разность
2,311	2,311 съ точностью до 0,001.

Объясненіе. Отбрасывая всѣ десятичные знаки, начиная съ 4-го, мы дѣлаемъ въ каждомъ числѣ погрѣшность, меньшую 0,001, и беремъ приближенія оба съ недостаткомъ. Въ такомъ случаѣ погрѣшность разности, равная разности погрѣшностей уменьшаемаго и вычитаемаго, очевидно, меньше 0,001.

7. Правила приближеннаго сложенія и вычитанія позволяютъ рѣшить слѣдующій важный въ практическомъ отношеніи вопросъ: найти сумму или разность данныхъ приближенныхъ десятичныхъ чиселъ с ъ в о з м о ж н о *б о л ь-*

шею точностью и опредѣлить верхній предѣлъ погрѣшности.

Пусть, напр., даны числа: 7,358..., 0,0274... и 3,56.., изъ которыхъ первое точно до $^1/_{1000}$, второе до $^1/_{10000}$ и третье до $^1/_{100}$, при чемъ предполагается, что мы не имѣемъ возможности найти цыфры, слѣдующія за тѣми, которыя даны (эти числа, напр., получены изъ опытныхъ изслѣдованій). Требуется найти сумму этихъ чиселъ съ наибольшею точностью. Примѣняя правило сокращеннаго сложенія, мы легко замѣтимъ, что сумма можетъ быть найдена только съ точностью до $^1/_{10}$ и потому, производя сложеніе, безполезно брать въ данныхъ числахъ (первомъ и второмъ) цыфры, стоящія направо отъ цыфры сотыхъ.

Пусть еще требуется найти съ возможно бо́льшею точностью разность чиселъ: 3,1415... и 2,034.., изъ которыхъ первое точно до $^1/_{10000}$, а второе—до $^1/_{1000}$, и оба числа взяты съ недостаткомъ. Примѣняя правило приближеннаго вычитанія, замѣтимъ, что разность можетъ быть найдена только до $^1/_{1000}$ (и потому въ первомъ числѣ безполезно брать цыфру 5).

Приближенное умноженіе.

8. Правило. Чтобы получить произведеніе двухъ десятичныхъ чиселъ съ точностью до одной единицы даннаго разряда, подписываютъ подъ множимымъ цыфры множителя въ обратномъ порядкѣ (справа налѣво) такъ, чтобы цыфра его простыхъ единицъ стояла подъ тою цыфрою множимаго, которая выражаетъ единицы, въ 100 разъ меньшія единицы даннаго разряда. Затѣмъ умножаютъ множимое на каждую значащую цыфру множителя, не обращая при этомъ вниманія на цыфры множимаго, стоящія вправо отъ той цыфры множителя, на которую умножаютъ. Всѣ эти частныя произведенія подписываютъ одно подъ другимъ такъ, чтобы первыя справа ихъ цыфры

стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, послѣ чего ихъ складываютъ. Въ суммѣ отбрасываютъ двѣ цыфры справа и увеличиваютъ на 1 послѣднюю изъ оставшихся цыфръ. Наконецъ, въ получившемся такимъ образомъ числѣ ставятъ запятую такъ, чтобы послѣдняя его справа цыфра выражала единицы даннаго разряда.

Правило это требуетъ измѣненія въ случаяхъ, о которыхъ будетъ сказано ниже.

Примѣръ. Найти съ точностью до 0,001 произведеніе:

314,159265358...×74,632543926...

314,159265358...			
62934 523647			
2199 114855	погрѣшность	<7	стотыс.
125 663704	»	<4	»
18 849552	»	<6	»
942477	»	<3	»
62830	»	<2	»
15705	»	<5	»
1256	»	<4	»
93	»	<3	»
27	»	<9	»
23446,50499			
23446,505			

Поступая по данному правилу, найдемъ приближенное произведеніе 23446,505, точное до 0,001 (съ недостаткомъ или съ избыткомъ).

Объясненіе. Во-1-хъ, объяснимъ, что всѣ частныя произведенія выражаютъ единицы одного и того же разряда, именно во 100 разъ меньшія единицы даннаго разряда (въ нашемъ примѣрѣ—стотысячныя доли). Дѣйствительно, умножая на первую цыфру 7 число 314159265, мы умножаемъ милліонныя доли на десятки; значитъ, получаемъ въ произведеніи стотысячныя доли. Да-

лѣе, умножая на 4 число 31415926, мы умножаемъ стотысячныя доли на простыя единицы; значитъ, получаемъ снова въ произведенiи стотысячныя доли, и т. д.

Изъ этого слѣдуетъ, что сумма 2344650499 выражаетъ стотысячныя доли, т.-е. она есть число 23446,50499.

Во-2-хъ, объяснимъ, что погрѣшность въ окончательномъ результатѣ менѣе 0,001.

Дѣйствительно, такъ какъ часть множимаго, написанная направо отъ цыфры 7 множителя, меньше 1 миллiонной, то, пренебрегая произведенiемъ этой части на 70, мы уменьшаемъ результатъ на число, меньшее 7 стотысячныхъ. Далѣе, такъ какъ часть множимаго, написанная направо отъ цыфры 4 множителя, меньше 1 стотысячной, то, пренебрегая произведенiемъ этой части на 4 простыя единицы, мы уменьшаемъ результатъ на число, меньшее 4 стотысячныхъ. Разсуждая подобнымъ образомъ относительно всѣхъ прочихъ цыфръ множителя, на которыя приходится умножать, замѣтимъ, что мы уменьшаемъ результатъ на число, меньшее 7+4+6+3+2+5+4+3+9 стотысячныхъ. Наконецъ, такъ какъ множимое меньше 1 тысячи, а часть множителя, написанная влѣво отъ множимаго (на которую, слѣд., не приходится умножать вовсе), меньше 2+1 стомиллiонныхъ, то, пренебрегая произведенiемъ множимаго на эту часть множителя, мы еще уменьшаемъ результатъ на число, меньшее 2+1 стотысячныхъ. Слѣдовательно, беря вмѣсто точнаго произведенiя число 23446,50499, мы уменьшаемъ первое на число, меньшее (7+4+6+3+2+5+4+3+9)+2+1 стотысячныхъ, т.-е. вообще меньшее 101 стотысячной, если только сумма цыфръ множителя, на которыя приходится умножать, увеличенная на первую изъ отбрасываемыхъ его цыфръ, не превосходитъ 100 (что въ большинствѣ случаевъ и бываетъ. *) Кромѣ того, отбра-

*) Это всегда имѣетъ мѣсто, если число частныхъ произведенiй не превосходитъ 10.

сывая двѣ послѣднія цыфры результата, мы снова уменьшаемъ произведеніе на число, не превосходящее 99 стотысячныхъ. Поэтому все уменьшеніе будетъ менѣе 101+99 стотысячныхъ, т.е. менѣе 2 тысячныхъ; если же послѣднюю цыфру увеличимъ на 1, т.-е. на 1 тысячную, то результатъ 23446,505 разнится отъ точнаго произведенія менѣе, чѣмъ на 2—1 тысячной, т.-е. менѣе 1-й тысячной (при чемъ остается неизвѣстнымъ, будетъ ли онъ съ избыткомъ или съ недостаткомъ).

Изъ этого объясненія слѣдуетъ, что данное правило (извѣстное подъ названіемъ правила **Утрехта** *) можетъ быть примѣняемо безъ всякаго измѣненія только тогда, когда сумма цыфръ множителя, на которыя приходится умножать, увеличенная на первую изъ его отбрасываемыхъ цыфръ, не превышаетъ 100. Когда эта сумма заключается между 100 и 1001, то въ правилѣ надо сдѣлать два измѣненія: 1) цыфру простыхъ единицъ подписать подъ тою цыфрою множимаго, которая выражаетъ единицы, въ 1000 разъ меньшія единицы даннаго разряда, и 2) въ результатѣ, вмѣсто двухъ, отбросить три послѣднія справа цыфры.

Когда же эта сумма не превышаетъ 10, то достаточно написать цыфру простыхъ единицъ множителя подъ тою цыфрою множимаго, которая выражаетъ единицы, въ 10 разъ меньшія единицы даннаго разряда, и въ результатѣ отбросить одну цыфру справа.

Замѣчаніе. Увеличивать на 1 послѣднюю изъ удержанныхъ цыфръ произведенія не всегда необходимо. Это нужно было сдѣлать въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ, потому что тамъ погрѣшность произведенія (до увеличенія на 1 послѣдней цыфры его) менѣе суммы

$$(7+4+6+3+2+5+4+3+9)+2+1+99 \text{ стотыс.},$$

которая заключается между 100 и 200 стотысячныхъ. Но

*) *Утрехтъ*—англійскій математикъ (1574—1660).

если бы отбрасываемыя 2 цыфры были не 99, а, напримѣръ, 25, то погрѣшность произведенія оказалась бы меньше суммы

$$(7+4+6+3+2+5+4+3+9)+2+1+25 \text{ стотыс.},$$

т.-е. меньше 71 стотыс., что, въ свою очередь меньше 100 стотыс., т.-е. меньше 1 тысячной. Значитъ, тогда не нужно было бы увеличивать послѣднюю цыфру на 1. Въ этомъ случаѣ произведеніе было бы съ недостаткомъ.

9. Въ примѣненіи правила Утрехта мы не обращаемъ никакого вниманія на тѣ цыфры множимаго, которыя стоятъ вправо отъ множителя, и на тѣ цыфры множителя, которыя стоятъ влѣво отъ множимаго; и тѣ, и другія мы можемъ совсѣмъ отбросить. Такимъ образомъ, во множимомъ и во множителѣ нужныхъ цыфръ должно быть одно и то же число; не трудно заранѣе опредѣлить, сколько цыфръ должно быть, чтобы произведеніе было съ заданною точностью. Разъяснимъ это на примѣрѣ.

Пусть требуется вычислить до $^1/_{100}$ произведеніе

$$1000\,\pi\,(\sqrt{5}-1),$$

гдѣ π есть отношеніе окружности къ діаметру, равное 3,1415926535... Обращая вниманіе на послѣднее умноженіе, разсуждаемъ такъ: искомое произведеніе должно быть вычислено до 1 сотой; значитъ, цыфра простыхъ единицъ множителя (т.-е. $\sqrt{5}-1$) должна стоять подъ 4-мъ десятичнымъ знакомъ множимаго; съ другой стороны, во множителѣ ($\sqrt{5}-1$) нѣтъ разрядовъ выше простыхъ единицъ; изъ этого заключаемъ, что больше 4-хъ десят. знаковъ во множимомъ, т.-е. въ $1000\,\pi$, безполезно вычислять. Значитъ, $1000\,\pi$ надо взять равнымъ 3141,5926; слѣд., и во множителѣ, т.-е. въ $\sqrt{5}-1$, надо вычислить 8 цыфръ. Извлеченіемъ находимъ, что $\sqrt{5}=2{,}2360679$ и, слѣд., $\sqrt{5}-1=$ $=1{,}2360679$.

Дѣйствіе выполняется такъ:

```
1000π=3141,592 6
    9760 632,1=√5—1
    ___________
    .3141 592 6
      628 318 4
       94 247 7
       18 849 0
          188 4
           21 7
            2 7
    ___________
     3883 220 5
     3883,22
```

Пусть еще требуется вычислить π^3 съ точностью до 0,01. Такъ какъ $\pi^3=\pi^2\pi$, и въ цѣлой части числа π только одна цыфра, то π^2 должно вычислить до 4-го десят. знака. Такъ какъ $\pi^2=\pi\ .\ \pi$, то, для нахожденія этого произведенія до 4-го десят. знака, надо взять число π съ 6-ю десят. знаками. Дѣйствіе расположится такъ:

```
π=3,141592          9,8696
  2 951413          5 1413
  ________          _______
  9 424776         29 6088
    314159            9869
    125660            3944
      3141              98
      1570              45
                    _______
       279         31 0044
         6         31,01=π³(до 1/100)
  ________
  9 869591
π²=9,8696.
```

10. Въ предыдущемъ примѣрѣ во множимомъ и во множителѣ мы могли взять (вычисливъ ихъ) столько цыфръ, сколько пожелаемъ. Но такъ не всегда бываетъ. Пусть, напр., даны два числа: 25,34627... и 8,3794..., изъ кото-

рыхъ первое точно до 1 стотысячной, а второе—до 1 десятитысячной, при чемъ цыфры, которыя должны были бы слѣдовать за данными, намъ неизвѣстны (числа эти получены изъ опытныхъ измѣреній); требуется вычислить произведеніе этихъ чиселъ съ возможно бо́льшею точностью.

Напишемъ сначала то число, у котораго всѣхъ цыфръ менѣе, т.-е. 8,3794, а подъ нимъ подпишемъ въ обратномъ порядкѣ цыфры другого числа такъ, чтобы цыфра высшаго его разряда приходилась подъ послѣднею цыфрою множимаго:

8,37 94
726 43,52

Теперь видимъ, что цыфра простыхъ единицъ множителя приходится подъ тысячными долями множимаго; слѣд., по правилу Утрехта, произведеніе получится съ точностью до одной единицы, бо́льшей тысячной доли во 100 разъ, т.-е. до $^1/_{10}$ (оно будетъ 212,3 съ недостаткомъ).

Приближенное дѣленіе.

11. Лемма. Если дѣлителя, бо́льшаго единицы, замѣнимъ его цѣлою частью, то увеличимъ частное на число, меньшее этого частнаго, дѣленнаго на цѣлую часть дѣлителя.

Для доказательства положимъ, что дѣлимое есть M, дѣлитель A и дробная часть дѣлителя α. Тогда цѣлая часть дѣлителя есть $A-\alpha$ и

$$\text{точное частное} = \frac{M}{A}, \text{ прибл. частное} = \frac{M}{A-\alpha};$$

$$\text{увеличеніе частнаго} = \frac{M}{A-\alpha} - \frac{M}{A} = \frac{MA - MA + M\alpha}{(A-\alpha)\,A} =$$

$$= \frac{M\alpha}{(A-\alpha)\,A} = \frac{M\alpha}{A} : (A-\alpha),$$

Такъ какъ $\alpha < 1$, то $M\alpha < M$; поэтому

$$\text{увеличеніе частнаго} < \frac{M}{A} : (A-\alpha),$$

т.-е. меньше точнаго частнаго, дѣленнаго на цѣлую часть дѣлителя.

Напр., замѣнивъ дѣлителя 367,28 его цѣлою частью 367, мы сдѣлаемъ ошибку, меньшую $^1/_{367}$ точнаго частнаго.

12. Правило. Чтобы найти частное двухъ десятичныхъ чиселъ съ точностью до одной единицы даннаго разряда, находятъ прежде всего высшій разрядъ частнаго и затѣмъ число его цыфръ *n*. Далѣе отдѣляютъ въ дѣлителѣ слѣва наименьшее число цыфръ, какое потребно для того, чтобы выражаемое ими число было не меньше числа *n*, сопровождаемаго *n* нулями. Остальныя цыфры дѣлителя отбрасываютъ. Въ дѣлимомъ отдѣляютъ слѣва столько цыфръ, чтобы выражаемое ими число содержало въ себѣ полученнаго дѣлителя менѣе 10 разъ. Остальныя цыфры дѣлимаго отбрасываютъ.

Раздѣливъ это дѣлимое на дѣлителя, находятъ первую цыфру частнаго и затѣмъ первый остатокъ.

Послѣ этого дѣлятъ первый остатокъ на дѣлителя, зачеркнувъ въ послѣднемъ одну цыфру справа; отъ этого получаютъ вторую цыфру частнаго и затѣмъ второй остатокъ.

Второй остатокъ дѣлятъ на дѣлителя, зачеркнувъ въ немъ еще одну цыфру справа; отъ этого находятъ третью цыфру частнаго и третій остатокъ.

Продолжаютъ такъ дѣйствіе до тѣхъ поръ (зачеркивая въ дѣлителѣ при каждомъ частномъ дѣленіи одну цыфру справа), пока не получатъ всѣхъ *n* цыфръ частнаго.

Наконецъ, въ полученномъ частномъ ставятъ запятую такъ, чтобы послѣдняя справа цыфра выражала единицы даннаго разряда.

Пусть, напр., требуется найти съ точностью до 0,01 частное:

31415,92653589.....:432,6394825..

Такъ какъ дѣлимое больше дѣлителя, умноженнаго на 10, но меньше дѣлителя, умноженнаго на 100, то высшій разрядъ частнаго—десятки. Съ другой стороны, послѣдняя цыфра въ частномъ должна выражать сотыя доли, согласно требованію; изъ этого заключаемъ, что число цыфръ въ частномъ должно быть 4.

Первыя слѣва цыфры дѣлителя, выражающія число, не меньшее 40000, будутъ 43263. Остальныя цыфры дѣлителя отбрасываемъ. Дѣлимое, согласно правилу, будетъ 314159. Остальныя цыфры дѣлимаго отбрасываемъ. Тогда дѣйствіе выполнится такъ:

314159	| 43263	или еще	314159	| 43263
302841	72,61	короче	11318	72,61
11318		(§ 75):	2666	
8652			74	
2666			31	
2592				
74				
43				
31				

Объясненіе. Прежде всего приведемъ вопросъ къ отысканію частнаго съ точностью до цѣлой единицы, при чемъ дѣлитель былъ бы число, не меньшее 40000. Для этого достаточно:

1) увеличить дѣлимое во сто разъ, отчего увеличится во столько же разъ частное, а, слѣдов., и погрѣшность его;

2) перенести въ дѣлимомъ и дѣлителѣ запятую вправо на одно и то же число цыфръ (отчего частное не измѣнится), именно на столько, чтобы дѣлитель сдѣлался не меньшимъ 40000.

Тогда вопросъ приводится къ нахожденію частнаго:

314159265,3... : 43263,9...

съ точностью *до цѣлой единицы*.

Замѣнимъ теперь дѣлителя цѣлою его частью; отъ этого, по доказанному, мы увеличимъ частное на число, меньшее этого частнаго, дѣленнаго на цѣлую часть дѣлителя. Но частное, содержа въ цѣлой части 4 цыфры, менѣе 10^4, а цѣлая часть дѣлителя не меньше 40000; вслѣдствіе этого мы увеличимъ частное на число, меньшее 10^4: 40000, т.-е меньшее $^1/_4$. Запомнивъ это, будемъ находить частное:

314159265,3... : 43263

Чтобы найти число единицъ высшаго разряда частнаго, т.-е. тысячи, достаточно раздѣлить число тысячъ дѣлимаго на дѣлителя. Это мы и сдѣлали, получивъ въ част номъ цыфру 7. Остатокъ отъ точнаго дѣлимаго будетъ 11318265,3... Этотъ остатокъ должно раздѣлить на 43263, чтобы пополнить приближенное частное, опредѣляемое теперь съ точностью до $^1/_4$. Раздѣливъ оба эти числа на 10, приводимъ вопросъ къ дѣленію 1131826,53... на 4326,3.

Это частное имѣетъ въ цѣлой части только 3 цыфры; значитъ, оно меньше 10^3. Замѣнивъ дѣлителя цѣлою его частью, которая болѣе 4000, мы увеличимъ частное на число, меньшее 10^3 : 4000, т.-е. меньшее $^1/_4$. Запомнивъ это, будемъ находить частное 1131826,53...: 4326.

Чтобы найти первую цыфру этого частнаго, т.-е. сотни, достаточно число сотенъ дѣлимаго раздѣлить на дѣлителя. Это мы и сдѣлали, получивъ въ частномъ цыфру 2.

Продолжая эти разсужденія далѣе, увидимъ, что при полученіи каждой цыфры частнаго мы его увеличиваемъ на число, меньшее $^1/_4$. Такъ какъ всѣхъ цыфръ въ частномъ 4, то въ результатѣ мы увеличиваемъ частное на число, меньшее 1.

Съ другой стороны, не дѣля остатка 31... на послѣдняго дѣлителя 43, мы уменьшаемъ частное на число, меньшее 1. Значитъ, мы увеличили его на число, меньшее 1, и уменьшили на число, меньшее 1; слѣд., полученный результатъ, во всякомъ случаѣ, точенъ до 1.

Перенося теперь запятую въ дѣлимомъ на прежнее мѣсто, т.-е. раздѣливъ его на сто, мы будемъ имѣть частное 72,61, съ точностью до $^1/_{100}$.

Замѣчаніе. Приведенное правило и его объясненіе не требуютъ никакого измѣненія въ томъ частномъ случаѣ, когда какое-нибудь дѣлимое содержитъ соотвѣтствующаго дѣлителя 10 разъ. Тогда ставимъ въ частномъ число 10 (въ скобкахъ). Продолжая дѣленіе, увидимъ, что всѣ слѣдующія цыфры частнаго должны быть нули. Пусть, напр., требуется найти частное 485172,923...: 78,254342... съ точностью до 1. Примѣняя правило, найдемъ:

485172	78254
469524	61(10,0
15648	6200
7825	
7823	
7820	
3	

Третье дѣлимое (7823) содержитъ соотвѣтствующаго дѣлителя (782) десять разъ; пишемъ въ частномъ число 10. Слѣдующая цыфра въ частномъ оказалась 0. Искомое частное есть число 61(10)0, т.-е. 6200.

Въ этомъ случаѣ приближенное частное больше точнаго частнаго. Дѣйствительно, цыфры частнаго, найденныя раньше, чѣмъ представился этотъ случай, не могутъ быть меньше, чѣмъ бы слѣдовало, такъ какъ мы при каждомъ частномъ дѣленіи брали дѣлителей, которые меньше точнаго дѣлителя. Значитъ, первыя двѣ цыфры точнаго частнаго должны выражать число, не большее 61, поэтому оно меньше числа 6200.

13. Пусть даны два числа: 56,42375... и 6,237.., изъ которыхъ первое точно до 1 стотысячной, а второе—до 1 тысячной, при чемъ предполагается, что цыфры, слѣдующія за данными, намъ неизвѣстны; требуется найти частное отъ дѣленія перваго на второе *съ возможно большею точностью*. Предположимъ, что примѣняя правило сокращеннаго дѣленія, мы могли бы въ

частномъ найти 4 цыфры. Тогда дѣлитель долженъ быть больше 40000. Но въ нашемъ дѣлителѣ не дано достаточнаго числа цыфръ, чтобы можно было образовать (по правилу дѣленія) число, бо̀льшее 40000. Значитъ, 4-хъ цыфръ въ частномъ получить мы не можемъ. Посмотримъ, можемъ ли получить 3 цыфры. Тогда дѣлитель долженъ быть болѣе 3000. Изъ нашего дѣлителя мы можемъ образовать число, большее 3000; это будетъ 6237. Съ другой стороны, и изъ нашего дѣлимаго мы можемъ образовать число, бо̀льшее 6237. Значитъ, мы можемъ найти въ частномъ 3 цыфры, но не болѣе. Такъ какъ высшій разрядъ частнаго, очевидно, простыя единицы, и всѣхъ цыфръ въ немъ 3, то оно будетъ точно до $^1/_{100}$

Если бы дѣлимое было только 56,42, а дѣлитель прежній—6,237, то тогда мы не могли бы получить въ частномъ и 3-хъ цыфръ, потому что въ дѣлимомъ не дано достаточнаго числа цыфръ, чтобы изъ нихъ образовать число, бо̀льшее 6237. Въ этомъ случаѣ мы могли бы найти только 2 цыфры частнаго. Дѣйствительно, тогда дѣлитель долженъ быть болѣе 200, т.-е. 623, а дѣлимое болѣе 623, что возможно.

14. Примѣромъ примѣненія предыдущихъ правилъ можетъ служить слѣдующая задача.

Задача. Вычислить съ точностью до одной сотой выраженіе:

$$x = \frac{\sqrt{348} - \sqrt{127}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{12}}$$

Это выраженіе есть частное; поэтому прежде всего опредѣлимъ, сколько должно быть цыфръ въ этомъ частномъ, а для этого надо знать высшій разрядъ его. Начавъ извлеченіе $\sqrt{348}$ и $\sqrt{127}$, мы увидимъ, что первый корень въ цѣлой своей части содержитъ 18, а второй 11; слѣд., числитель равенъ приблизительно 7; знаменатель равенъ приблизительно 2. Значитъ, высшій разрядъ въ частномъ—простыя единицы. Такъ какъ

частное требуется вычислить до сотых долей, то въ немъ должно быть 3 цыфры. Поэтому знаменатель мы должны вычислить настолько точно, чтобы изъ него можно было (по правилу сокращеннаго дѣленія) образовать число, бо̀льшее 3000, для чего достаточно вычислить 5 его цыфръ, а для этого необходимо (по правилу сокращеннаго сложенія) найти отдѣльные корни знаменателя съ 6-ю цыфрами. Произведя извлеченіе, найдемъ:

$\sqrt{2}=1,41421$; $\sqrt{3}=1,73205$; $\sqrt{5}=2,23606$; $\sqrt{12}=3,46410$ и

затѣмъ: $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{12}=1,9183$ (до $^1/_{10000}$).

Теперь надо вычислить числителя съ такою точностью, чтобы изъ первыхъ его цыфръ можно было образовать число, бо̀льшее 19183. Такъ какъ числитель равенъ приблизительно 7, то сверхъ цѣлаго числа въ немъ потребуется вычислить еще 4 десятичные знака, а такъ какъ числитель есть разность, то уменьшаемое и вычитаемое надо вычислить также до 4-го десятичнаго знака. Извлеченіемъ находимъ:

$$\sqrt{348}=18,6547 \qquad \sqrt{127}=11,2694$$
$$\sqrt{348}-\sqrt{127}=7,3853$$

Остается раздѣлить по правилу сокращеннаго дѣленія 73853 на 19183, послѣ чего получимъ:

$$x=3,85 \text{ (до } ^1/_{100}\text{)}.$$

Задачи:

1. Вычислить до $^1/_{100}$ выраженіе $y=ax^2+bx$, если $a=2,71856..$, $b=1,605043...$ и $x=0,04271...$

2. При тѣхъ же заданіяхъ вычислить съ наибольшею точностью выраженіе:

$$y=\frac{ax+1}{b+x}.$$

3. Вычислить до $^1/_{10000}$ выраженіе $^1/_\pi$.

4. Вычислить $\frac{\pi}{64800}$ съ 13 десятичными знаками.

5. **Вычислить до $^1/_{100}$ произведеніе**

$$\pi . 37{,}54832709 . 637{,}8324926.$$

6. Прямоугольникъ имѣетъ измѣреніями: $b=38{,}32...$ и $h=5{,}687...$ Вычислить его площадь съ возможно бо́льшею точностью и указать предѣлъ погрѣшности.

7. Вычислить съ точностью до 1 миллиметра окружность, описанную около квадрата, котораго сторона равна 1 метру.

8. Вычислить до 0,001 выраженіе:

$$2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.}$$

9. Вычислить съ 6-ю десятичными знаками сторону квадрата, равновеликаго кругу, котораго радіусъ равенъ 1.

10. Вычислить до 0,001 выраженіе $\sqrt{2{,}5-\sqrt{1{,}25}}$.

Указаніе. По правиламъ алгебры, чтобы найти приближенное значеніе квадр. корня съ точностью до $^1/n$, надо умножить подкоренное число на n^2, изъ полученнаго произведенія извлечь корень съ точностью до 1 и результатъ раздѣлить на n. Слѣд., вопросъ приводится къ вычисленію выраженія:

$$\sqrt{2500000-1000000\sqrt{1{,}25}}$$

съ точностью до 1. Для этого достаточно извлечь корень съ точностью до 1 изъ цѣлой части подкоренного числа. Итакъ, разность $2500000-1000000\sqrt{1{,}25}$ надо вычислить до 1; значитъ, вычитаемое надо вычислить тоже до 1; поэтому $\sqrt{1{,}25}$ придется находить до 1 милліонной.

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХЪ ЧИСЕЛЪ,

НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИХЪ 6000.

2	179	419	661	947	1229	1523	1823	2131
3	181	421	673	953	1231	1531	1831	2137
5	191	431	677	967	1237	1543	1847	2141
7	193	433	683	971	1249	1549	1861	2143
11	197	439	691	977	1259	1553	1867	2153
13	199	443	701	983	1277	1559	1871	2161
17	211	449	709	991	1279	1567	1873	2179
19	223	457	719	997	1283	1571	1877	2203
23	227	461	727	1009	1289	1579	1879	2207
29	229	463	733	1013	1291	1583	1889	2213
31	233	467	739	1019	1297	1597	1901	2221
37	239	479	743	1021	1301	1601	1907	2237
41	241	487	751	1031	1303	1607	1913	2239
43	251	491	757	1033	1307	1609	1931	2243
47	257	499	761	1039	1319	1613	1933	2251
53	263	503	769	1049	1321	1619	1949	2267
59	269	509	773	1051	1327	1621	1951	2269
61	271	521	787	1061	1361	1627	1973	2273
67	277	523	797	1063	1367	1637	1979	2281
71	281	541	809	1069	1373	1657	1987	2287
73	283	547	811	1087	1381	1663	1993	2293
79	293	557	821	1091	1399	1667	1997	2297
83	307	563	823	1093	1409	1669	1999	2309
89	311	569	827	1097	1423	1693	2003	2311
97	313	571	829	1103	1427	1697	2011	2333
101	317	577	839	1109	1429	1699	2017	2339
103	331	587	853	1117	1433	1709	2027	2341
107	337	593	857	1123	1439	1721	2029	2347
109	347	599	859	1129	1447	1723	2039	2351
113	349	601	863	1151	1451	1733	2053	2357
127	353	607	877	1153	1453	1741	2063	2371
131	359	613	881	1163	1459	1747	2069	2377
137	367	617	883	1171	1471	1753	2081	2381
139	373	619	887	1181	1481	1759	2083	2383
149	379	631	907	1187	1483	1777	2087	2389
151	383	641	911	1193	1487	1783	2089	2393
157	389	643	919	1201	1489	1787	2099	2399
163	397	647	929	1213	1493	1789	2111	2411
167	401	653	937	1217	1499	1801	2113	2417
173	409	659	941	1223	1511	1811	2129	2423

2437	2833	3259	3659	4073	4507	4943	5393	5801
2441	2837	3271	3671	4079	4513	4951	5399	5807
2447	2843	3299	3673	4091	4517	4957	5407	5813
2459	2851	3301	3677	4093	4519	4967	5413	5821
2467	2857	3307	3691	4099	4523	4969	5417	5827
2473	2861	3313	3697	4111	4547	4973	5419	5839
2477	2879	3319	3701	4127	4549	4987	5431	5843
2503	2887	3323	3709	4129	4561	4993	5437	5849
2521	2897	3329	3719	4133	4567	4999	5441	5851
2531	2903	3331	3727	4139	4583	5003	5443	5857
2539	**2909**	**3343**	**3733**	**4153**	**4591**	**5009**	**5449**	**5861**
2543	2917	3347	3739	4157	4597	5011	5471	5867
2549	2927	3359	3761	4159	4603	5021	5477	5869
2551	2939	3361	3767	4177	4621	5023	5479	5879
2557	2953	3371	3769	4201	4637	5039	5483	5881
2579	2957	3373	3779	4211	4639	5051	5501	5897
2591	2963	3389	3793	4217	4643	5059	5503	5903
2593	2969	3391	3797	4219	4649	5077	5507	5923
2609	2971	3407	3803	4229	4651	5081	5519	5927
2617	2999	3413	3821	4231	4657	5087	5521	5939
2621	**3001**	**3433**	**3823**	**4241**	**4663**	**5099**	**5527**	**5953**
2633	3011	3449	3833	4243	4673	5101	5531	5981
2647	3019	3457	3847	4253	4679	5107	5557	5987
2657	3023	3461	3851	4259	4691	5113	5563	
2659	3037	3463	3853	4261	4703	5119	5569	
2663	3041	3467	3863	4271	4721	5147	5573	
2671	3049	3469	3877	4273	4723	5153	5581	
2677	3061	3491	3881	4283	4729	5167	5591	
2683	3067	3499	3889	4289	4733	5171	5623	
2687	3079	3511	3907	4297	4751	5179	5639	
2689	**3083**	**3517**	**3911**	**4327**	**4759**	**5189**	**5641**	
2693	3089	3527	3917	4337	4783	5197	5647	
2699	3109	3529	3919	4339	4787	5209	5651	
2707	3119	3533	3923	4349	4789	5227	5653	
2711	3121	3539	3929	4357	4793	5231	5657	
2713	3137	3541	3931	4363	4799	5233	5659	
2719	3163	3547	3943	4373	4801	5237	5669	
2729	3167	3557	3947	4391	4813	5261	5683	
2731	3169	3559	3967	4397	4817	5273	5689	
2741	3181	3571	3989	4409	4831	5279	5693	
2749	**3187**	**3581**	**4001**	**4421**	**4861**	**5281**	**5701**	
2753	3191	3583	4003	4423	4871	5297	5711	
2767	3203	3593	4007	4441	4877	5303	5717	
2777	3209	3607	4013	4447	4889	5309	5737	
2789	3217	3613	4019	4451	4903	5323	5741	
2791	3221	3617	4021	4457	4909	5333	5743	
2797	3229	3623	4027	4463	4919	5347	5749	
2801	3251	3631	4049	4481	4931	5351	5779	
2803	3253	3637	4051	4483	4933	5381	5783	
2819	3257	3643	4057	4493	4937	5387	5791	

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

Отвлеченныя цѣлыя числа.

ОТДѢЛЪ ВТОРОЙ.

Именованныя цѣлыя числа.

ОТДѢЛЪ ТРЕТІЙ.

О дѣлимости чиселъ.

ОТДѢЛЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Обыкновенныя дроби.

ОТДѢЛЪ ПЯТЫЙ.

Десятичныя дроби.

(Десятичныя числа).

ОТДѢЛЪ ШЕСТОЙ.

Отношеніе и пропорція.

ОТДѢЛЪ СЕДЬМОЙ.

Задачи на пропорціональныя величины.

ПРИЛОЖЕНІЕ.